

Direktni produkt (notranji)  $N_1 \dots N_s \triangleleft G$

$$G = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_s \quad \wedge \quad N_i \cap N_{i+1} = \{1\} \quad \forall i$$

•  $\Leftrightarrow \forall g \in G. g = n_1 \cdot \dots \cdot n_s \quad n_i \in N_i; \text{ enotizen zapis}$

Komutator  $x$  in  $y$  je  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$

•  $M, N \triangleleft G, M \cap N = \{1\} \Rightarrow mn = nm \quad \forall n \in N, \forall m \in M$

•  $G = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_s \Rightarrow G \cong N_1 \times N_2 \times \dots \times N_s$   
notranji direktni produkt      zunanji direktni produkt  
(Velja za končne grupe)

# Abelove grupe

- $|G| = mn$ ;  $m, n$  tuji  
 $H = \{x \in G; mx = 0\}$   $K = \{x \in G; nx = 0\}$   
Potem  $G = H \oplus K$  in  $|H| = m$ ;
- Posledica: V končna abelova grupa je vsota  $p$ -grup
- $p$ -grupa je ciklična  $\Leftrightarrow$  vsebuje natanko 1 grupo mod  $p$
- V končna abelova grupa je izomorfna direktni vsoti cikličnih  $p$ -grup
- končna abelova grupa  $G$   $|G| = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$   
 $H_i = \{x \in G; p_i^{a_i} x = 0\}$   
 $\Rightarrow |H_i| = p_i^{a_i}$   $G = H_1 \oplus \dots \oplus H_s$
- vsaka končno generirana abelova grupa je končna direktna vsota cikličnih grup

$$= \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_n$$

# KONČNE GRUPE

Delovanje  $G \curvearrowright X$

- 1)  $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$
  - 2)  $1 \cdot x = x$
- (levo delovanje)

Imamo delovanje  $G \curvearrowright X$ . Počeni

$$\Phi: G \longrightarrow \text{Sym} X$$

$\Phi: g \mapsto (x \mapsto gx)$  je homomorfizem

$\ker \Phi$  je jedro delovanja

Orbita  $G \cdot x = \{gx; g \in G\}$

Stabilizator  $G_x = \{g \in G; gx = x\}$

Fiksne točke  $g$ -ja  $X^g = \{x \in X; gx = x\} = \text{fix}(g)$

Fiksne točke (invariante)

$$X^G = \bigcap_{g \in G} X^g = \{x \in X; \forall g \in G. gx = x\}$$

$$\bullet G_x \leq G$$

$$\bullet x \sim y \iff \exists g \in G. y = gx \quad \text{Ekvivalenčni}$$

razredi so orbite  $(G \cdot x)$

$$X/G = X/\sim \text{ prostor orbit}$$

• **Tranzitivno delovanje** delovanje z eno orbito

$$\bullet \forall x \in X. |G \cdot x| = [G : G_x]$$

$$\bullet G \text{ končna} \implies |G| = |G_x| \cdot |G \cdot x|$$

- V končno grupo  $G$  lahko vložimo v simetrično grupo  $S_n$  za nek  $n \in \mathbb{N}$

Uporabne grupe ki niso izomorfne  $\mathbb{Z}_n$

$$4: \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \{\text{id}, (12), (34), (12)(34)\}$$

$$6: D_6 \cong S_3$$

$$8: \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, D_8, Q$$

$$9: \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$$

$$10: D_{10}$$

$$12: \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2, D_{12}, \text{Dic}_{12}, A_4 = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (234), (243), (341), (314), (412), (421)\}$$

$\approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

$$14: D_{14}$$

$$\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$$

•  $G$   $p$ -grupa.  $G \curvearrowright X \Rightarrow |X| \equiv |X^G| \pmod p$

• **Burnsidova lema**  $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$

•  $G \curvearrowright X$  netrivialno delovanje

$\exists x_1, \dots, x_r \in X - X^G \quad |X| = |X^G| + \sum_{i=1}^r |G : G_{x_i}|$

• **Razredna formula**

$\exists x_1, \dots, x_r \in X - Z(G). \quad |G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^r [G : C_G(x_i)]$

•  $G$   $p$ -grupa  $\Rightarrow Z(G) \neq \{1\} \quad (p \mid |Z(G)|)$

•  $|G| = p^2 \Rightarrow G$  je abelova

• **Cauchyjev izrek**  $p \mid |G| \Rightarrow \exists a \in G. \text{red}(a) = p$

• **Lagrangev izrek**  $H \leq G \Rightarrow |H| \mid |G|$

•  $H \leq G$  je  $p$ -podgrupa Sylowa če

$$|H| = p^\alpha; \quad p^\alpha \mid |G|; \quad p^{\alpha+1} \nmid |G|$$

• **Izrek Sylowa**

$$1) \quad p^l \mid |G| \Rightarrow \exists H \leq G. |H| = p^l$$

( $\exists p$ -podgrupa Sylowa)

2)  $\forall p$ -podgrupa  $G$  je vsebovana v  $p$ -podgrupi Sylowa

3) Vse  $p$ -podgrupe Sylowa v  $G$  so konjugirane med sabo

4)  $n_p, \dots$  št.  $p$ -podgrup Sylowa

$$n_p \mid |G|; \quad n_p \equiv 1 \pmod p$$

$H \leq G$ .  $N(H) = \{a \in G; aHa^{-1} = H\}$   
je **normalizator**.

• velja:  $N(H) \leq G$   $H \triangleleft N(H)$

•  $N(H) = G \Leftrightarrow H \triangleleft G$

•  $n_p = 1 \Leftrightarrow S \triangleleft G$

• grupa je **enostavna** če sta  $\{1\}$  in  $G$  edini edinki

•  $A_n$  je enostavna za  $\forall n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$

• grupa  $G$  je **rešljiva**, če  $\exists$  končno zaporedje  $\{1\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_k = G$   
 $G_i \triangleleft G_{i+1}$  ;  $G_{i+1}/G_i$  abelove

•  $G$  rešljiva  $\Rightarrow$

1)  $H \leq G$   $H$  rešljiva

2)  $N \triangleleft G \Rightarrow G/N$  rešljiva

•  $N \triangleleft G$  rešljiva in  $G/N$  rešljiva  $\Rightarrow G$  rešljiva

• konjugirana podgrupa  $aHa^{-1}$   
za nek  $a \in G$

•  $H, K \leq G$  sta konjugirani: če  $aHa^{-1} = K$

• (levi) odsek  $aH = \{ah; h \in H\}$   
 $aH = bH \iff ab^{-1} \in H$

• Fermatov mali izrek:  $a^p \equiv a \pmod{p}$

•  $\varphi: G \longrightarrow G'$  homomorfizem

a)  $H \leq G \Rightarrow \varphi^*(H') \leq G$

b)  $N' \trianglelefteq G' \Rightarrow \varphi^*(N') \trianglelefteq G$

c)  $H \leq G \Rightarrow \varphi_*(H) \leq G'$

d)  $N \trianglelefteq G$  in  $\varphi$  surj.  $\Rightarrow \varphi(N) \trianglelefteq G'$

• korespondenčni izrek

a)  $\forall$  podgrupa grupe  $H/N$  je oblike  $H'/N$   
kjer  $H \leq G$  in  $N \leq H$

b)  $\forall$  edinka grupe  $G/N$  je oblike  $M/N$   
kjer  $M \trianglelefteq G$  in  $N \leq M$

•  $K$  komutativen koldbar  $M \trianglelefteq K$

$M$  maksimalen  $\iff K/M$  je pdje

**komutatorska podgrupa**  $[G, G] = G' = \{a^{-1}b^{-1}ab; a, b \in G\}$

- $H \triangleleft G \wedge G/H$  abelove  $\Rightarrow [G, G] \subseteq H$
- $H < G$ .  $H \triangleleft G \Leftrightarrow [H, G] < H$
- $[G, G] \triangleleft G$
- $G/[G, G]$  je abelove

**komutatorska vrsta**  $G \triangleleft G' \triangleleft G'' \triangleleft \dots$

- $G$  je rešljiva  $\Leftrightarrow$  komutatorska vrsta doseže  $\{1\}$
- $f$  epimorfizem  $G \rightarrow H$ .  $f_*(G^{(k)}) = H^{(k)}$
- $H \triangleleft G \Rightarrow H' \triangleleft G$  ( $H^{(k)} \triangleleft G$  za  $\forall k$ )
- $A, B$  rešljivi.  $\Rightarrow A \times B$  rešljiva
- $\forall$  končna  $p$  grupa je rešljiva
- $\forall$  grupa reda  $p^2$   $p \neq 2, p, 2 \in \mathbb{P}$  je rešljiva
- grupa reda  $8p$  je rešljiva