

Pogoji za metriko

1. $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a=b$
2. $d(a,b) = d(b,a)$
3. $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$ ✓

Topologija

1. zaprtost za poljubne unije
2. zaprtost za končne preseke ✓

Baze

1. je pokritje
2. Presek dveh baznih je unija baznih ✓

veznost $f^*(B_y) \in J_x$ ✓

- lahko preverimo na bazi:
 $\Leftrightarrow f^*(Z^{\text{zpr}}) = \text{zprta} \Leftrightarrow \overline{f_*(A)} \subseteq f_*(\overline{A})$
- lahko preverjamo na predbazi:
 $\forall V \in \mathcal{P} \quad f^*(V) \in J_x$ ✓

odprtost ✓

- lahko preverjamo na bazi ✓

Homeomorfizmi:

f bijekcija $\wedge f^{-1}$ bijekcija

f^{-1} in f sta si inverzni

- zveza odprta bijekcija
 $\Leftrightarrow$ zveza zaprta bijekcija



Topološke lastnosti ... lastnosti, ki se držanje
pri homeomorfizmi

• diskretnost

• metrizabilnost

• separabilnost

• 1-sterdnost, 2-sterdnost

• povezanost

• kompaktnost

• T_0, T_1, T_2, T_3, T_4

NE:

- omejenost
- polnost



Dednost:

• diskretnost in trivialnost NE

• metrizabilnost

• 1-sterdnost

• 2-sterdnost

• T_1, T_2, T_3 , regularnost

• separabilnost

$(A^{\text{odp}} \subseteq X \Rightarrow A \text{ je separabilen})$

• normalnost

$(A^{\text{zap}} \subseteq X \Rightarrow A \text{ je normalen})$



Multiplikativnost

• T_1, T_2, T_3



• ostró loči

• loči



$$T_0: \forall x, y. \exists U \in \mathcal{T}. x \in U \wedge y \notin U$$

(kolonnamov)

$$T_1: \forall x, y. \exists U, V \in \mathcal{T}. x \in U, y \in V, x \notin V, y \notin U$$

(Fréchet)

$$T_2: \forall x, y. \exists U \in \mathcal{T}. x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

(Hausdorff)

$$T_3: \forall x. \forall A^{\text{zap}}. x \notin A. \exists U, V. x \in U, A \subseteq V. U \cap V = \emptyset$$

$$T_4: \forall A^{\text{zap}}, B^{\text{zap}}. A \cap B = \emptyset. \exists U, V \in \mathcal{T}. A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$$

Prostor je

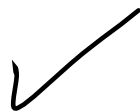
Kolmogorovov: T_0

Frechetov: T_0, T_1

Hausdorffov: T_0, T_1, T_2

Regularen: T_0, T_1, T_2, T_3

Normalen: T_0, T_1, T_2, T_3, T_4



$$T_4 \Leftrightarrow \forall A^{\text{zap}} \subseteq U \in \mathcal{T}. \exists V \in \mathcal{T}. A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$

$$T_3 \Leftrightarrow \forall x \in U \in \mathcal{T}. \exists V \in \mathcal{T}. x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$

$$T_2 \text{ (Hausdorffov)} \Leftrightarrow \exists U^{\text{odp}} \ni x, y \notin \bar{U}$$

$$\Leftrightarrow \bigcap_{x \in U} \bar{U} = \{x\} \Leftrightarrow \Delta_x \text{ je zaprta v } X \times X$$

• Zaporedje ima največ eno limito



Podbaza $\mathcal{P}$, če velja: $UP = X$

$$\mathcal{B} = \{ \cap U : U \subseteq \mathcal{P} \wedge U \neq \emptyset \wedge |U| \neq \infty \}$$

(družina vseh končnih presekov elementov $\mathcal{P}$)

- generira najmanjšo topologijo, kjer so $U \in \mathcal{P}$ odprte

Pokritja:

- $\{X_\lambda\}$ odprto pokritje za X
 $A \subseteq X. (\forall \lambda. A \cap X_\lambda \text{ odp} \Leftrightarrow A \text{ odp v } X)$
- $\{X_\lambda\}$ zaprto lokalno končno pokritje X
 $A \subseteq X. (\forall \lambda. A \cap X_\lambda \text{ zap} \Leftrightarrow A \text{ zap v } X)$
- $\{X_\lambda\}$ odprto ali lokalno končno pokritje X
 f zvezna $\Leftrightarrow f|_{X_\lambda}$ zvezna

Vložitev: $f: X \rightarrow Z_p$ je homeomorfizem

$$Z_p \text{ odp} \Rightarrow (f \text{ je vložitev} \Leftrightarrow f \text{ odprta})$$

$$Z_p \text{ zap} \Rightarrow (f \text{ je vložitev} \Leftrightarrow f \text{ zaprta})$$

Izrek:

- $f = (f_y, f_z) : X \longrightarrow Y \times Z$

f je zvezna $\Leftrightarrow f_y, f_z$ sta zvezni

- X je 1-Steven. $\forall A \subseteq X. \bar{A} = L(A)$ ^{↖ limite} _{$\bigvee A$} zaporedi.

$\wedge (f \text{ je zvezna} \Leftrightarrow f_* (L(A)) \subseteq L(f_*(A)))$

- odprt podprostor separabilnega prostora je separabilen

- $B \subseteq A \subseteq X$

$$Cl_A B = Cl_X B \cap A$$

$$Int_A B \supseteq Int_X B \cap A$$

$$F_A B \subseteq F_X B \cap A$$

- Steven metrični prostor brez izoliranih točk ne more biti poln

- Frechetov $\Leftrightarrow$ enojci so zaprti

Implikacije:

- 2-števnost $\Rightarrow$ 1-števnost
- 2-števnost $\Rightarrow$ separabilnost
- separabilnost + metričnost $\Rightarrow$ 2-števnost
- metričnost $\Rightarrow$ Hausdorffovost
- Hausdorffov $\Rightarrow$ Fréchetov
- Normalnost $\Rightarrow$ regularnost $\Rightarrow$ Hausdorff $\Rightarrow$ Fredt
- J Hausdorff $\wedge \bar{J} \subseteq J' \Rightarrow J'$ Hausdorff
- metričnost $\Rightarrow$ normalnost
- $T_4 + T_1 \Rightarrow T_3 + T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$
- regularnost $(T_3 + T_1) + 2\text{-števnost} \Rightarrow$ normalnost

