

# Prostori in preslikave

(topološki)

(zvezni)

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$a \in \mathbb{R}$   $f$  je zvezna v  $a$

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in \mathbb{R}. |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$f$  je zvezna če je zvezna v vseh točkah

Metrični prostor  $X$

$$d: X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

$$1) d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$2) d(x, y) = d(y, x)$$

$$3) d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

$(X, d)$  je metrični prostor

$$f: X \longrightarrow Y$$

$d_x \quad d_y$

$$a \in X$$

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in D. d_x(x, a) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Izrek:  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  je  
 zvezna, če  $\forall$  odprto množico  $U \subseteq Y$   
 njena prasluka  $f^*(U)$  je odprta  
 množica v  $X$

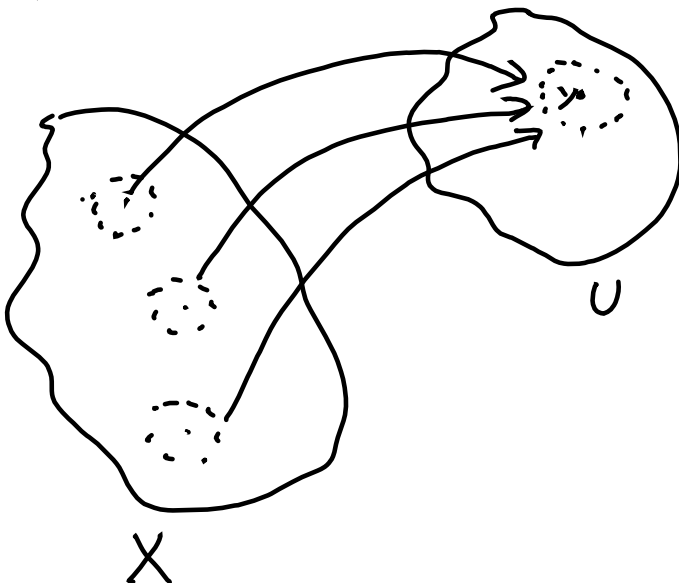
$U \subseteq X$  je odprta, če so vse točke  $x \in U$   
 notranje

$x \in U$  je notranja, če  $\exists r > 0. K(x, r) \subseteq U$

PDD - poorly drawn diagram

Dokaz:

$X \xrightarrow{f} Y$   
 $U \subseteq Y$   
 $x \in X$        $y \in U \leftarrow$  notranja točka  
 $f(x) = y$



definicija: Funkcija  $f$  je zvezna, če je  
prasluka vsake odprte množice odprta

Množica  $U \subseteq X$  je odprta, če je element  
topologije  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$

$$(X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y)$$

$$f^*(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$$

Trditev:  $(X, d)$  metrični prostor

Množica  $U \subseteq X$  je odprta  $\Leftrightarrow$

lahko jo predstavimo kot unijo odprtih krogov

Dokaz:

Vse točke  $U$  so notranje

$$\forall x \in U. \exists r > 0, K(x, r) \subseteq U$$

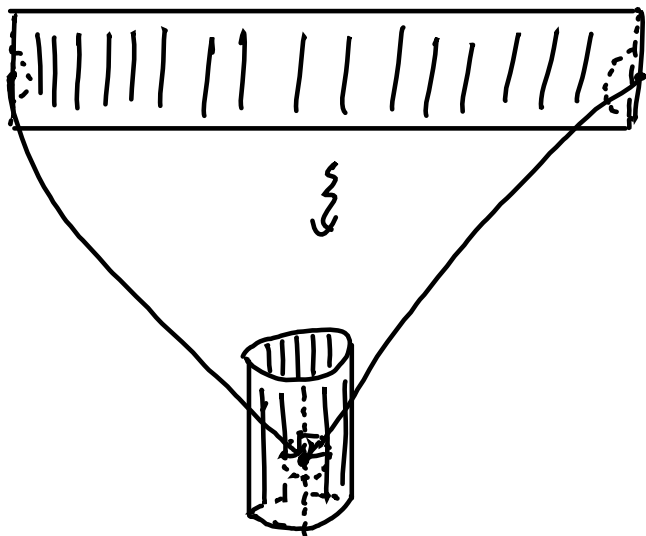
$$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} K(x, r_x)$$

Presek odprtih krogel je odprt



$$\min \{ r - d(x, a), r' - d(x', a) \}$$

Posledično je presek odprtih množic odprt



$$x, x - \frac{x^3}{6}, x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!}, \dots \leadsto \sin x$$

# Topološki prostori:

Naj bo  $X$  poljubna množica

Topologija na  $X$  je družina množic  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ,  
ki zadošča naslednjim pogojem:

(T0):  $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$

T1: Poljubna unija elementov družine  $\mathcal{T}$   
je element družine  $\mathcal{T}$

T2: Poljuben končni presek elementov  $\mathcal{T}$  je  
element  $\mathcal{T}$

Elemente  $\mathcal{T}$  imenujemo odprte množice

Topološki prostor je množica  $X$  z neko  
topologijo  $\mathcal{T}$

Primeri:

- Topologija iz metrike:

$$(X, d), \quad \mathcal{T}_d := \{ \text{vse možne unije odprtih krogel} \}$$

$$\mathcal{T}_2: \bigcup_{\lambda} K(x_{\lambda}, r_{\lambda}) \cap \left( \bigcup_{\delta} K(x_{\delta}, r_{\delta}) \right) =$$

$$\bigcup_{\lambda, \delta} (K(x_{\lambda}, r_{\lambda}) \cap K(x_{\delta}, r_{\delta}))$$

↑  
ni krogla, ampak je unija krogel

$\mathcal{T}_d$  je topologija, ki je inducirana z metriko  $d$

$\mathcal{T}$  je metrizablena, če je porojena z metriko

$X, d$

$$\bar{d}(x, x') := \min \{ d(x, x'), 1 \}$$

$\bar{d}$  je metrika

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\bar{d}}$$

- $X$  poljubna množica

$\mathcal{T}_* := \{\emptyset, X\}$  je topologija

$\nwarrow$  trivialna topologija

- $\mathcal{T}_{dis} := \mathcal{P}(X)$  vse podmnožice so odprte

$\nwarrow$  diskretna topologija

metriza bilnost  $\mathcal{T}_{triv}, \mathcal{T}_{dis}?$

$$\begin{matrix} d(x, x') > 0 \\ x \quad x' \end{matrix}$$

$$K(x, \frac{d(x, x')}{2}), K(x', \frac{d(x, x')}{2})$$

disjunktni

$$d(x, x') = \begin{cases} 0; & x = x' \\ 1; & x \neq x' \end{cases} \quad \text{diskretna metrika}$$

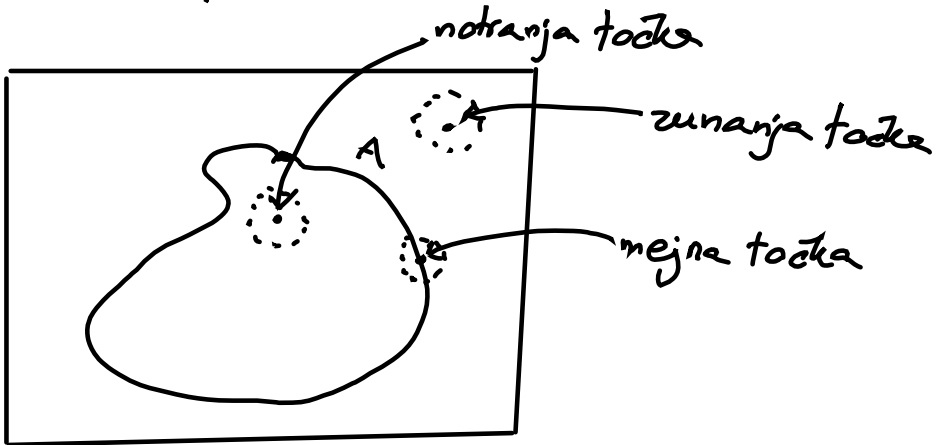
$$K(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$$

$X$ , topologija je katerakoli

$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , ki je zaprta za poljubne unije  
in za končne preseke

$(X, \mathcal{T})$

V metričnih prostorih:



notranjost  $A = \{ \text{vse notranje točke} \}$

zaprta  $A = \text{notranjost } A \cup \text{meja } A$

$A$  je zaprta, če so vse njene mejne točke  
elementi  $A$

notranjost:  $\text{int}(A) \quad \overset{\circ}{A}$

- unija vseh odprtih množic, ki so vsebovane v  $A$

$$= \bigcup \{U \in \mathcal{T}; U \subseteq A\} = \text{največja odprta podmnožica } A$$

v topološkem prostoru  $(X, \mathcal{T})$  je

$\overset{\circ}{A}$  = največji element  $\mathcal{T}$ , ki je vsebovan v  $A$

$A$  je zaprta, če je  $X - A \quad (A^c) \in \mathcal{T}$

$Z$  := družina vseh zaprtih množic

$$\bigcup \{A : X - A \in \mathcal{T}\}$$

za  $Z$  velja

1) poljuben presek elementov  $Z$  je element  $Z$

2) vsaka končna unija elementov  $Z$  je element  $Z$

( $Z$  je komplement topologije)

Primer:

- če zahtevamo, da so <sup>točke</sup>  $X$  zaprte množice  
 $\leadsto$  končne množice  $X$  so zaprte

$$\{A \in \mathcal{P}(X); |A| < \infty\} \cup \{X\}$$

zadešča zahtevam (1), (2)

torej komplement so topologija na  $X$

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X); |X - A| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

topologija končnih komplementov

$\mathcal{T}_{kk}$  ..... topologija končnih komplementov

če  $X$  končen  $\leadsto \mathcal{T}_{kk} = \mathcal{T}_{diskretna}$  na  $X$

Zaprta je  $A :=$  presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo  $A$

= je najmanjša zaprta množica v  $X$ , ki vsebuje  $A$

zaprtje  $A$ :  $\mathcal{cl}(A) \quad \bar{A}$

Primer:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$$

$$B \subseteq A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

Jasno je da  $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$

$\bar{A} \cup \bar{B}$  je najmanjša  $\uparrow$  zaprta množica, torej  
 $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$

$$\overline{A \cap B} \stackrel{?}{\longleftrightarrow} \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{DN}$$

Meja  $A$  :  $FrA$   $cl(A) - intA$   $\bar{A} - \overset{\circ}{A}$

Meja  $A$  je vedno zaprta množica

# Zvezne preslikave

$(X, \mathcal{T}_X)$   $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologiji

$f: X \longrightarrow Y$  je zvezna če velja

$$f^*(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$$

torej če je preslika vsake odprte množice odprta.

Primer :

- vse zvezne funkcije v smislu metričnih prostorov so zvezne kot funkcije med porajenimi topologijami

$$\cdot f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$$

Rezim da  $\mathcal{I}_y$  je trivijna  $\mathcal{I}_y = \{\emptyset, Y\}$   
 $\Rightarrow f$  je zerna

Recimo da je  $T_x$  diskretna  $\Rightarrow f_j$  je zvezna

$$\alpha(X, \mathcal{J}) \longrightarrow (X, \mathcal{J}')$$

$$\text{id}_J \text{ wem } \alpha \Leftrightarrow J' \subseteq J$$

- $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  konstante

$$f(x) = y \quad \forall x \in X$$

$f \in \mathcal{W}^{2,p}$

$$U \in \mathcal{T}_Y \quad f^*(U) = \begin{cases} X & ; y \in U \\ \emptyset & ; y \notin U \end{cases} \quad \text{objekt odprti}$$

$$f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_k) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evk})$$

Konstante so edine zvezne funkcije

$$y_0, y_1 \in Z_f \quad y_0 \neq y_1$$

$f^*(U), f^*(V)$  sta odprti in disjunktni;

V topologiji končnih komplementov ni disjunktnih  
nepraznih odprtih množic

$U, V \in J_{kk}$  ..., odprti, neprečni;

$$|X-U| < \infty \quad |X-V| < \infty$$

$U^c U V^c$  je končan  
"

$(U \cap V)^c$  je komplement

$UNV$  je neprazen, če je  $X$  neskončen

Splaznje: X negkončna y metrice, d

$$(x, \mathcal{I}_x) \rightarrow (y, \mathcal{I}_y)$$

edine werne funktije so konstante

$$(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$$

$C((X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y))$  .... množica zveznih preslikav  
 $C(X, Y)$ ,  $C(X) := C(X, \mathbb{R})$ , kjer ma  $\mathbb{R}$   $\mathcal{T}_{\text{eucl.}}$

Prostor  $X$  = množica  $X$  z neko topologijo

preslikava = zvezna funkcija

$$\text{Zveznost: } f^*(y) \subseteq f^*(x)$$

Trditelj: kompozitum preslikave je preslikava  
(zvezna funkcija)

$$\text{Dokazi: } (X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{T}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{T}_Z)$$

$$f \circ g \text{ } g \circ f$$

Naj bo  $O \subseteq Z$  odprta podmnožica

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

$$\underbrace{f^*(\underbrace{g^*(O)}_{\text{odprta}})}_{\text{odprta}} \text{ torej } f^*(g^*(O)) \in \mathcal{T}_X$$

Trditvi:

ekvivalentne izjave:  $f: X \rightarrow Y$

(1)  $\Leftrightarrow f$  je zvezna (prasilke odprtih množic so odprte)

(2)  $\Leftrightarrow$  prasilka  $f$  vsake zaprte množice je zaprta

(3)  $\Leftrightarrow \overline{f_*(A)} \subseteq f_*(\bar{A})$

Dokaz:

(1)  $\Leftrightarrow$  (2)

$$A \subseteq Y$$

$$f^*(A^c) = f^*(A)^c$$

$$A \text{ zaprta} \Rightarrow A^c \text{ odprta} \Rightarrow f^*(A)^c \text{ odprta} \\ \Rightarrow f^*(A) \text{ zaprta}$$

(2)  $\Leftrightarrow$  (3)

$$f^* f_*(A) \supseteq A$$

$$f_* f^*(B) \subseteq B$$

$$(\Rightarrow) \quad \underbrace{f^*(\overline{f_*(A)})}_{\substack{\text{zaprta} \\ \text{zaprto po 2)}} \supseteq f^*(f_*(A)) \supseteq A$$

$A$  je vsebovana  
v zaprti množici, potem je tudi  $\bar{A}$   
vsebovana tam

$$f^*(\overline{f_*(A)}) \supseteq \bar{A}$$

$$\overline{f_*(A)} \supseteq f_*(\bar{A})$$

( $\Leftarrow$ )  $B$  zap na  $Y$

$$\overline{f^*(B)} \text{ je zaprta} \quad \text{tj} \quad f^*(B) = \overline{f^*(B)}$$

$$f_*(\overline{f^*(B)}) \subseteq f_*(f^*(B)) \subseteq \bar{B} = B$$

$$\overline{f^*(B)} \subseteq f^*(B) \Rightarrow \overline{f^*(B)} = f^*(B)$$

ker je zaprta kvejemu večje ali enako

## Homeomor Azmi:

$f: (X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{\sim} (Y, \mathcal{T}_Y)$  je homeomorfizem,  
če je  $f$  bijekcija in  $f_*$  je bijekcija  
med topologijama

$$f_*: \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(Y)$$

$$f^*: \mathcal{P}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(X) \text{ sta si inverzni}$$

$$f_* (\mathcal{T}_X) \subseteq \mathcal{T}_Y \leftarrow f^{-1} \text{ zvezna}$$

$$f^* (\mathcal{T}_X) \subseteq f^* (\mathcal{T}_Y) \leftarrow \text{zveznost } f$$

Trditve: Za  $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  so  
ekvivalentne trditve:

- 1)  $f$  je homeomorfizem
- 2)  $f$  je bijekcija,  $f, f^{-1}$  sta zvezni
- 3)  $f$  je bijektivna, zvezna in odprta  
(slika  $\forall$  odprte množice je odprta  
(  $f_*(\mathcal{T}_X) \subseteq \mathcal{T}_Y$  )
- 4)  $f$  je bijektivna, zvezna in zaprta  
(zaprte množice slike v zaprte)



Primeri:

$$[0, 1) \cup \{2\} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto x \quad ; x \in (0, 1)$$

$$2 \mapsto 1 \quad ; x = 2$$

zema, bijektivna

inverz ni zvezen

Nekatere zvezne funkcije so avtomatično  
(kot posledica zveznosti) zaprte oziroma  
odprte.

Primeri

$f^{\text{av}}: X^{\text{komp}} \longrightarrow Y^{\text{metr.}}$  je vedno zaprta

projekcija  $X \times Y \longrightarrow X$  je vedno odprta

$p: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  gladeke z neničelnim odvodom  
so vedno odprte

če obstaja homeomorfizem

$$f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$$

$X$  in  $Y$  sta homeomorfna  $X \approx Y$

Homeomorfnost je ekvivalenčna relacija

Primeri:

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \approx & [c, d] \\ a < b & & c < d \end{array}$$

$$f: [0, 1] \longrightarrow [a, b]$$

$$f(x) = a + (b-a)x$$

bijektivna, zvezna, inverz je zvezan

$$[a, b] \approx [0, 1] \approx [0, 1)$$

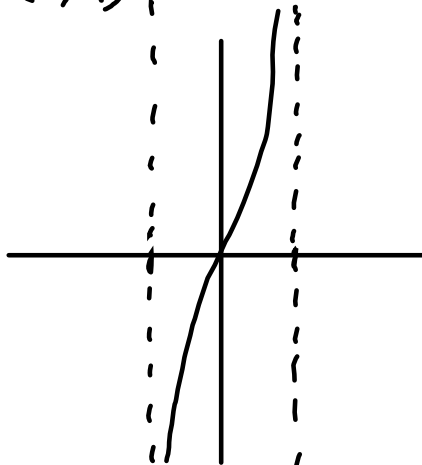
Vsak končen interval je homeomorfen enemu  
izmed naslednjih

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & [0, 1) & (0, 1) \approx \mathbb{R} \\ & \approx & \\ & [a, \infty & \end{array}$$

$$f: (-1, 1) \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$$



Topološka lastnost je tista, ki:

lastnost prostora, ki se ohranja pri homeomorfizmi

$$(M, d) \quad \bar{d}(x, y) = \min \{d(x, y), 1\}$$

omejenost, polnost nista topološki lastnosti

$$B^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x}\| \leq 1\}$$

enotske  $n$ -krogla

$$\overset{\circ}{B}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x}\| < 1\} \text{ odprta enotska } n\text{-krogla}$$

$$S^{n-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; \|\vec{x}\| = 1\}$$

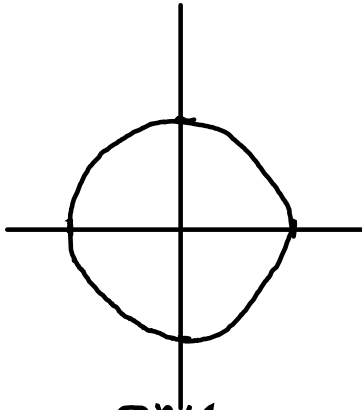
$(n-1)$  enotske sfera

Lokalno videti: vsake točke izgleda kot  $\mathbb{R}^{n-1}$  ravnine

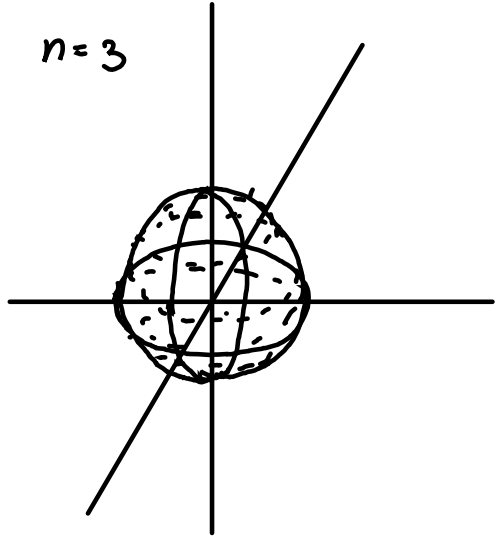
$$f: \overset{\circ}{B}^n \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$$

$$f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1 - \|\vec{x}\|} \quad \text{inverz } f^{-1}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1 + \|\vec{x}\|}$$

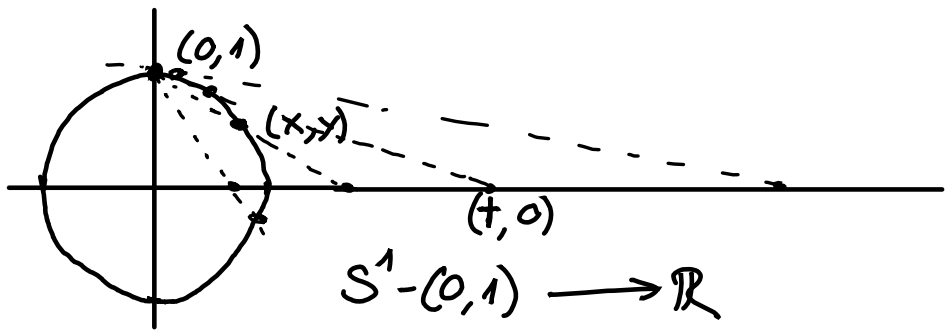
$n=2$



$n=3$



$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^{n+1} \\ \cup \\ S^n - \{t\bar{c}\} \approx \mathbb{R}^n \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{generator} \\ \downarrow \end{array}$$



$(0, 1)$   $(x, y)$   $(t, 0)$  leżą na tej samej prostej

$$t = \frac{x}{1-y}$$

$$f^{-1}(t) = \left( \frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right)$$

$$f: S^n - \{(0, \dots, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto \frac{x_1 + \dots + x_n}{1 - x_{n+1}}$$

$e\mathbb{R}^n$

$$f: (\vec{x}, x_{n+1}) \longmapsto \frac{\vec{x}}{1 - x_{n+1}}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{(\vec{0}, 1)\}$$

$$\vec{x} \longmapsto \left( \frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2+1}, \frac{\|\vec{x}\|^2-1}{\|\vec{x}\|^2+1} \right)$$

Takie przestrzenie  $S^n$  są n-rzeczne mnogościowe

# Baze in predbaze

$$(X, \mathcal{J})$$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$  je baza  $\mathcal{J}$ , če lahko vse elemente  $\mathcal{J}$  lahko zapišemo kot unije elementov  $\mathcal{B}$

Standardni primer

V metričnem prostoru  $(X, d)$  so krogle baza

Dovolj je če vzamemo samo majhne krogle

(npr. z radijem  $\frac{1}{n}$ )

$(X, \mathcal{I}_d)$  vsake baza vsebuje vse enojčke

Trditel

$(X, \mathcal{T}_X)$  in  $\mathcal{B}_X$  baza  $\mathcal{T}_X$

$(Y, \mathcal{T}_Y)$  in  $\mathcal{B}_Y$  baza  $\mathcal{T}_Y$

1)  $A \subseteq X$  je odprta  $\Leftrightarrow$

$$\forall a \in A. \exists B \in \mathcal{B}_X. a \in B \subseteq A$$



2).  $f: X \rightarrow Y$  naj bo poljubna funkcija.

$$f \text{ je zvezna} \Leftrightarrow f^*(\mathcal{B}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X$$

$$f \text{ je odprta} \Leftrightarrow f_*(\mathcal{B}_X) \subseteq \mathcal{T}_Y$$

Dokaz 2)

$(\Rightarrow) \checkmark$

$(\Leftarrow)$  Naj bo  $U \in \mathcal{T}_Y$

$$U = \bigcup_{\lambda} B_{\lambda} ; B_{\lambda} \in \mathcal{B}_Y$$

$$f^*(U) = f^*\left(\bigcup_{\lambda} B_{\lambda}\right) = \bigcup_{\lambda} \underbrace{f^*(B_{\lambda})}_{\in \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_X$$

$$U \in \mathcal{T}_Y \quad U = \bigcup_{\lambda} B_{\lambda} \quad B_{\lambda} \in \mathcal{B}_X$$

$$f_*(U) = f_*\left(\bigcup_{\lambda} B_{\lambda}\right) = \bigcup_{\lambda} \underbrace{f_*(B_{\lambda})}_{\in \mathcal{T}_Y} \in \mathcal{T}_Y$$

Primer:

$$f: S^1 \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C} \text{ (enotska kompleksna štavila)}$$

$$f(z) = z^2$$

$f$  je odprta

Lahko preslikamo okolico vsake točke

$x \in X$ ,  $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$  je lokalna baza  
okolice  $x$ , če za  $\forall$  odprto okolico  $U$ , ki  
vsebuje  $x$   $\exists B \in \mathcal{B}_x$ .  $x \in B_x \subseteq U$

običajno privzamemo, da so elementi  
 $\mathcal{B}$  okolice  $x$

če je  $\mathcal{B}$  baza  $\mathcal{T}$ , potem je

$\mathcal{B}_x = \{ B \in \mathcal{B} ; x \in B \}$  je lokalna  
baza okolice  $x$ . Obratno  $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$

Standardni primer v  $(X, d)$  je

$\{ K(x, r) ; r \in \mathbb{R} \}$  lokalna baza pri  $x$

$$\mathcal{B} \quad \mathcal{T} = \{ \text{unije elementov } \mathcal{B} \}$$

Ali je  $\mathcal{T}$  topologija?

$\mathcal{T}$  je očitno zaprta za poljubne unije

$$U, V \in \mathcal{T} \quad U \cap V = (U B_\lambda) \cap (U B'_\mu) =$$

$$\left[ \begin{array}{l} \hookrightarrow U B_\lambda \quad B_\lambda \in \mathcal{B} \\ \hookrightarrow U B'_\mu \quad B'_\mu \in \mathcal{B} \end{array} \right] = \bigcup_{\lambda, \mu} \underbrace{B_\lambda \cap B'_\mu}_{\text{preseki dveh elementov}}$$

če družina  $\mathcal{B}$  vsebuje končne

preseke, potem tudi  $\mathcal{T}$  vsebuje končne preseke,  $\mathcal{T}$  topologija

↑ preostanek pogojev. Zadošča če je vsak končen presek elementov  $\mathcal{B}$  unija elementov  $\mathcal{B}$

Trditv:

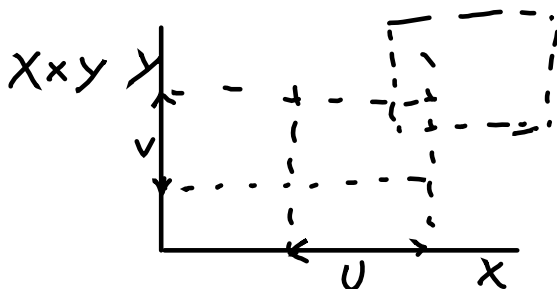
$\mathcal{B}$  je družna podmnožica  $X$

$\mathcal{T} := \{ \text{unija elementov } \mathcal{B} \}$

Potem

$\mathcal{T}$  je topologija na  $X \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \mathcal{B} \text{ je pokritje } X \\ (2) \text{ za poljubna} \\ A, A'' \in \mathcal{B} \\ x \in A \cap A'' \\ \exists A'''. x \in A''' \subseteq A \cap A'' \end{cases}$

$(x, \mathcal{T}_x) \quad (y, \mathcal{T}_y)$



$\mathcal{T}_{x \times y}$  produktna topologija je topologija, ki je generirana z bazo elementov  $U \times V$  kjer  $U \in \mathcal{T}_x$   $V \in \mathcal{T}_y$

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_x, V \in \mathcal{T}_y\}$$

ustreza pogoj za bazo

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{p_X} & X \quad J_X \\ & \searrow p_Y & \\ & & Y \quad J_Y \end{array}$$

Projekcije sta zvezni:

$$U \in J_X$$

$$p_X^{-1}(U) = U \times Y \in J_{X \times Y}$$

Projekcije sta odprti.

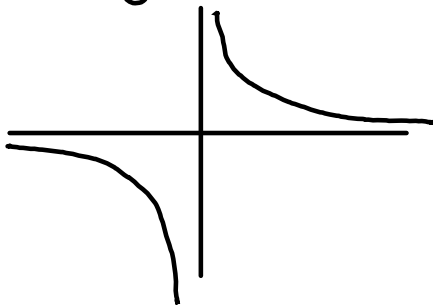
$$p_{X*}(U \times V) = U$$

Zato ~~so~~ projekcije odprte

Ali so zaprte?

$$p_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A := \text{graf } f(x) = \frac{1}{x}$$



$A$  je zaprta

$p_{1*}A = \mathbb{R} - \{0\}$   
ni zaprta

Naj bo  $\mathcal{P}$  poljubna družina podmnožic  $X$ . Kaj je najmanjša topologija na  $X$ , ki vsebuje  $\mathcal{P}$

Družina vseh končnih presekov elementov  $\mathcal{P}$  ustreza pogoju 2 iz teorema

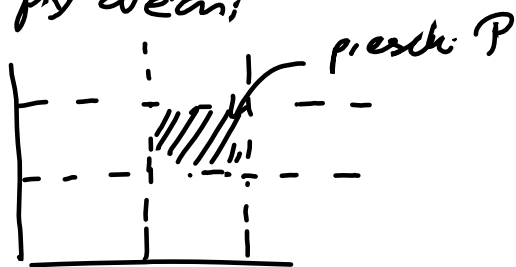
Če je  $\mathcal{P}$  podzdruga  $X$ , potem je  $\mathcal{T}$  topologija, ki jo kot baza generira vse končne preseke elementov  $\mathcal{P}$

Pravimo, da je  $\mathcal{P}$  pred baza topologije  $\mathcal{T}$

Primer:

Produktna topologija na  $X \times Y$  je najmanjša topologija, za katero sta projekciji  $pr_X$  in  $pr_Y$  zvezni.

$$\mathcal{T} = \{ pr_X^*(U) \mid U \in \mathcal{T}_X \\ pr_Y^*(V) \mid V \in \mathcal{T}_Y \}$$



To je definicija produktne topologije za produkte poljubno mnogo faktorjev

Trditav:

$$(X, \mathcal{T}_X) \quad (Y, \mathcal{T}_Y)$$

$\mathcal{P}$  naj bo neka pred baza za  $\mathcal{T}_Y$

$$f: X \rightarrow Y \text{ je zvezna} \Leftrightarrow f^*(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{T}_X$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \\ &\Leftarrow f^*\left(\bigcap_i \mathcal{P}_i\right) = \bigcap_i f^*(\mathcal{P}_i) \in \mathcal{T}_X \end{aligned}$$

Pozor: tako ne moremo testirati odprtosti preslikav

Trditvi:

$X, Y, Z$  prostori;

$f: X \rightarrow Y \times Z$  je zvezna  $\Leftrightarrow$   
 $\hookrightarrow (f_Y, f_Z)$

$f_Y, f_Z$  sta zvezni;

t.j. funkcija v produkt je zvezna  $\Leftrightarrow$

njene komponente so zvezne

Dokaz:

$(\Rightarrow)$   $f_Y = p_{Y1} \circ f$   
 $f_Z = p_{Z1} \circ f$  kompozitum zveznih funkcij

$(\Leftarrow)$  Po preizj: trditi je dovolj pogledati  
 $f^*(P)$  ( $P = U \times Z \cup Y \times V$ )

$$\begin{aligned} f^*(U \times Z) &= \{x \in X \mid f(x) \in U \times Z\} = \\ &= \{x \in X \mid (f_Y(x), f_Z(x)) \in U \times Z\} = \end{aligned}$$

$$= \{x \in X \mid f_Y(x) \in U\} = f_Y^*(U)$$

$$f^*(Y \times V) = f_Z^*(V)$$

# Baze in predbaze

## 1. aksiom števnosti:

$T$  ima števne lokalne baze

Ze  $\forall x \in X. \exists$  družina okolice  $x$   $U_1, U_2, \dots$   
(števno)  $\forall U \ni x. \exists x \in U_n \subseteq U$   
 $(X, T)$  je 1-števen  $\uparrow$  definicije

## 2. aksiom števnosti:

$T$  ima števno bazo

$(X, T)$  je 2-števen

$\nwarrow$  ni aksiom  
ampak v  
rešnici det

Primeri:

- $(X, T)$  ima lahko tudi končno bazo

Sled:  $T$  je končna

- dobro če je  $X$  končna  $\Rightarrow T$  končna  
 $\Rightarrow$  in avtomatično 1,2-števna

- metrični prostori so 1-števni  
 $X, \{K(X, \frac{1}{n})\}$

- neštevna množica z diskretno topologijo  
je 1-števna, ampak ne more biti  
2-števna

Jasna 2-števnost  $\Rightarrow$  1-števnost

Trditev:  $(X, \mathcal{T})$  je 1-steven:

1)  $\forall A \subseteq X$  je  $\bar{A} = L(A) = \{x; x \text{ je limita zaporedja v } A\}$

2)  $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  je zvezna  
 $\Leftrightarrow f(L_*(A)) \subseteq L(f_*(A))$

Dokaz:  $A \subseteq L(A) \subseteq \bar{A}$

$$\bar{A} \subseteq L(A)$$

$x \in \bar{A}$   $U_1, U_2, \dots$  števna baza okoli  $x$   
Vzememo  $x_1 \in U_1 \cap A, x_2 \in U_2 \cap A, \dots$

2) DN



Primer:

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{eucl})$  je 2-števna

$\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$  je števna in

Definicija

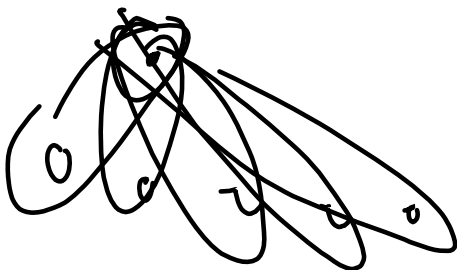
$(X, \mathcal{T})$  je *separabilen* če v  $X$  obstaja števna gosta podmnožica

$$\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$$

separabilnost + 1-števnost  $\stackrel{?}{\Rightarrow}$  2-števnost

NE  $\therefore$

Očitno: 2-števnost implicira separabilnost



Trditev:

V metričnih prostorih je separabilnost ekvivalentna 2-števnosti

Dokaz:

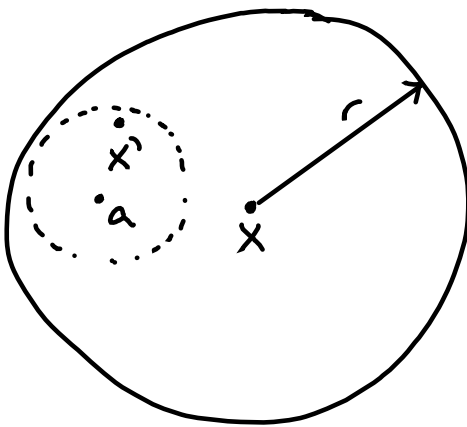
Separabilnost + metričnost implicira 2-števnost

A naj bo števno gosta

$\{K(a, r) : a \in A, r \in \mathbb{Q}\}$  je baza

Dovolj je dokazati, da je vsaka krogle unija krogel.

$K(x, r)$  je poljubna krogle



$\Delta$   
 $\parallel$   
 $\frac{r - d(x, x')}{3}$  Izberemo  $a \in A$ , da je

$$d(x', a) < \frac{r - d(x, x')}{3}$$

Izberemo racionalno število  $g \in \mathbb{Q}$

$$0 < g < 2\Delta$$

$$x' \in (a, g) \subseteq K(x, r)$$

Primer:

$$C([0, 1])$$

Weierstrassov izrek:  $\forall$  zvezno funkcijo  
lahko enakomerno aproksimiramo s  
polinomi.

Vsek polinom lahko enakomerno aproksimiramo  
z racionalnim polinomom.

Torej  $C([0, 1])$  je separabilen (in  
metričen) sledi da je 2-štven

## Podprostori

$$(X, \mathcal{T}) \quad A \subseteq X$$

$$\mathcal{T}_A := \{ A \cap U ; U \in \mathcal{T} \}$$

$\mathcal{T}_A$  je topologija na  $A$

$$T1) U_\lambda \in \mathcal{T}_A \quad U_\lambda = U_\lambda' \cap A \quad U_\lambda' \in \mathcal{T}$$

$$\bigcup U_\lambda = \bigcup (U_\lambda' \cap A) = (\bigcup U_\lambda') \cap A \in \mathcal{T}_A$$

T2) Na isti način

$\mathcal{T}_A$  je inducirana / podedovana topologija na  $A$  in  $(A, \mathcal{T}_A)$  je podprostor  $(X, \mathcal{T})$

Primeri:

- evklidska topologija na  $\mathbb{R}$  je inducirana z evklidsko topologijo na  $\mathbb{R}^2$

- $d$  metrika na  $X$   $A \subseteq X$

$$(X, d) \rightsquigarrow (X, \mathcal{T}_d) \rightsquigarrow (A, (\mathcal{T}_d)_A)$$



$$(A, d_A) \rightsquigarrow (A, \mathcal{T}_{d_A})$$

//

$$B \subseteq A \subseteq (X, \mathcal{T})$$

$$\mathcal{T}_B = (\mathcal{T}_A)_B$$

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evk})$

$\bigcup_{\mathbb{N}}$

inducirane topologije je diskretne

Trditelj: zaprte množice v  $\mathcal{J}_A$  so preseki.  
 $A$  z zaprtimi podmnožicami v  $X$

Dokaz:

$$F \text{ zaprta v } (X, \mathcal{J}) \Rightarrow \underline{F \cap A} \text{ je zaprt v } (A, \mathcal{J}_A)$$

$$F = X - U; U \in \mathcal{J} \Rightarrow F \cap A = (X - U) \cap A = A - U \cap A$$

$$U \in \mathcal{J}_A$$

$$\Leftarrow B \text{ je zaprt v } (A, \mathcal{J}_A)$$

$$B = A - U \cap A = A \cap (X - U)$$

$$U \in \mathcal{J}_A \quad \text{Zaradi}$$

$\mathcal{B}$  je baza za  $\mathcal{T}$

$\mathcal{B}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{B}\}$  je baza  $A$ .

$(X, \mathcal{T})$  1,2-steven  $\Rightarrow (A, \mathcal{T})$  je 1,2-steven

Topološka lastnost je dedna, t.j. iz tega da ima  $(X, \mathcal{T})$  lastnost sledi da jo imajo vsi podprostrani.

Diskretnost in trivialno ot topologije so dedni

Separabilnost ...

Oprt podprostor separabilnega prostora je separabilen

$$\text{trdste: } X \supseteq A \supseteq B$$

$$Cl_A B = Cl_X B \cap A$$

$$Int_A B \supseteq Int_X B \cap A$$

$$Fr_A B \subseteq Fr_X B \cap A$$

VIDA SPI

$\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Z}$

$$Fr_A B \subseteq Fr_X B \cap A$$



$$x \in Fr_A B \text{ po'jubem}$$

$$\text{velja } \forall U \overset{A}{\supseteq} x. U \cap B \neq \emptyset \wedge U \cap (A-B) \neq \emptyset$$

$$U \cap (A-B) \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A - U \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow U - U \cap B \neq \emptyset \Rightarrow U \cap (X-B) \neq \emptyset$$

$$\parallel$$

$$U \cap X$$

$$\text{Grej } \forall U \overset{x}{\subseteq} A. U \cap B \neq \emptyset \wedge U \cap (X-B) \neq \emptyset$$

$$\text{ker } x \in A$$

$$\forall U \subseteq X \text{ kdica } x. U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\forall U \subseteq X \text{ kdica } x$$

$$\exists V \overset{x}{\subseteq} A. V \subseteq A.$$

$$\forall U \subseteq U. U \cap B \neq \emptyset \wedge U \cap (X-B) \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$x \in Fr_X B$$

$$\underline{\underline{cl_A B = cl_X B \cap A}}$$

$$cl_A B \subseteq cl_X B$$

$$A - cl_A B \supseteq A - cl_X B$$

$$x \in A - cl_X B$$

$$x \in A \wedge x \in X - cl_X B$$

$$\exists U^{adp} \subseteq X. x \in U \wedge U \cap cl_X B = \emptyset$$

$$U \cap A \text{ je otvora } \vee \underbrace{A}_{\text{otvora } \vee A}$$

$$x \in U \cap A \wedge (U \cap A) \cap cl_X B \subseteq$$

$$U \cap cl_X B = \emptyset$$

$$\Rightarrow x \in A - cl_A B$$

$$x \in cl_X B \cap A$$

$$x \in A \wedge x \in cl_X B$$

$$cl_X B \cap A \subseteq cl_A B$$

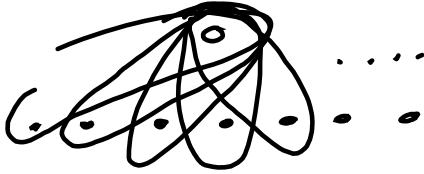
$$A - cl_X B \supseteq A - cl_A B$$

$$x \in \underbrace{A - cl_A B}_{\text{otvora } \vee A}$$

$$\exists U^{adp} \subseteq A. x \in U \wedge U \cap cl_A B = \emptyset$$

Separabilnost ni dedna

neštevna množica z disk. topologij



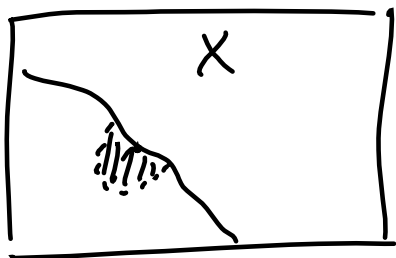
$X$  neštevna  $a \in X$   $\mathcal{T} := \{U \subseteq X; a \in U\} \cup \{\emptyset\}$

opomba:  $\{a\}$  je gost v  $X$

Topologija ki jo  $\mathcal{T}$  inducira na

$X - \{a\}$  je diskretna ki ni

(če bi bil števni bi bila cela množica  
goste točke v množici)



$$\begin{aligned}
 & A \hookleftarrow \text{od } \nu X \\
 & \hookrightarrow B = A \cap U \\
 & A^{\text{od } p} \subseteq X \wedge B^{\text{od } p} \subseteq A \Rightarrow B^{\text{od } p} \subseteq X \\
 & A^{\text{zr}} \subseteq X \wedge B^{\text{zr}} \subseteq A \Rightarrow B^{\text{zr}} \subseteq X
 \end{aligned}$$

$$B = A \cap F \quad F^{\text{zr}} \subseteq X$$

$$(A, \mathcal{T}_A) \xhookrightarrow[\text{inkluzija}]{i} (X, \mathcal{T}) \xrightarrow[\text{vezna}]{f} (Y, \mathcal{T}')$$

$$\begin{aligned}
 \text{veznost } i & \iff i^*(U) \quad U \in \mathcal{T} \\
 & \parallel \\
 & U \cap A \in \mathcal{T}_A
 \end{aligned}$$

inkluzija je vezna

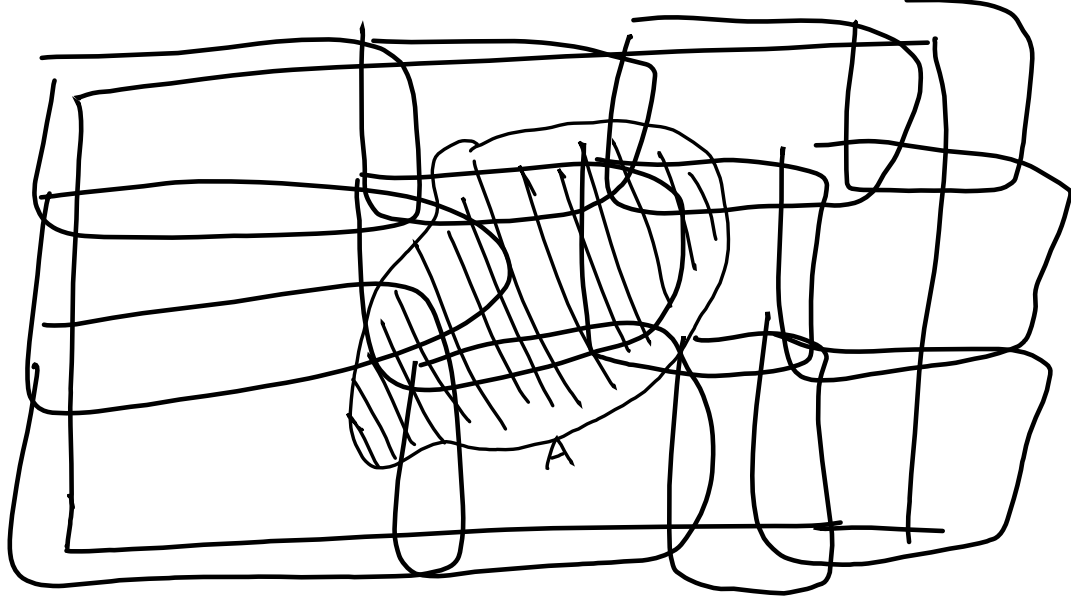
$\mathcal{T}_A$  je najmanjša topologija na  $A$   
za katero je inkluzija vezna

$f \circ i$  vezna

$\parallel$

$f|_A$  zžita  $f$  na  $A$

zžita vezna funkcija je vezna



Trditelj:

a)  $\{X_\alpha\}$  odprto pokritje  $X$

$$A \subseteq X, A \cap X_\alpha \text{ odpr} \forall \alpha \Leftrightarrow A \text{ odpr} \vee X$$

b)  $\{X_\alpha\}$  zaprto in lokalno končno pokritje  $X$

$$A \subseteq X \wedge A \cap X_\alpha \text{ zapr} \forall \alpha \Leftrightarrow A \text{ zapr} \vee X$$

lokalna končna pokritje:

$$\forall x \in X \exists U \overset{\text{odpr}}{\subseteq} X, x \in U \cap \text{končno mnogo indeksov } \lambda$$

Dokaz:

a)  $\Rightarrow A = \bigcup_\alpha X_\alpha \cap A$  je unija odprtih množic  
torej je  $A$  odprta

b)  $X - A$  je odprta

$x \in A, \exists U \subseteq X$  ki vsebuje končno mnogo  $X_\alpha$

$$X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_n} \leadsto$$

$$U - \underbrace{X_{\alpha_1} \cap A}_{\text{zapr}} - \underbrace{X_{\alpha_2} \cap A}_{\text{zapr}} - \dots \text{ je odprta}$$

okolišice  $x$ , ki ne seka  $A$  torej  $A^c \subseteq X$

trči

$\{X_\lambda\}$  pokrije  $X$ , ki je bodisi odprto ali lokalno konvergentno

$f: X \rightarrow Y$  je zvezna  $\Leftrightarrow f|_{X_\lambda}$  zvezna  $\forall \lambda$

Alternativno

$\{f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y\}$  zvezne in usklajene na presekih ( $f_\lambda|_{X_\lambda \cap X_{\lambda'}} = f_{\lambda'}|_{X_\lambda \cap X_{\lambda'}}$  za poljubni  $\lambda, \lambda'$ )

Potem obstaja netenka ena preslikava

$f: X \rightarrow Y$  da  $f|_{X_\lambda} = f_\lambda$

Dokaz:  $f_\lambda|_{X_\lambda \cap X_{\lambda'}} = f_{\lambda'}|_{X_\lambda \cap X_{\lambda'}}$

Zagotavlja da je  $f: X \rightarrow Y$  enolično definirana s  $f(x) := f_\lambda(x)$  za  $x \in X_\lambda$

$f$  je zvezna

Če imamo odprto pokritje, potem

$$U \text{ odprto } \subseteq Y \quad f^*(U) = \bigcup_\lambda f^*(U) \cap X_\lambda =$$

$$= \bigcup_\lambda (f|_{X_\lambda})^*(U)$$

$\uparrow$   
zvezna

$$\underbrace{\text{odprto } \cap X_\lambda \Rightarrow \text{odprto } \cap X}$$

$$\underbrace{\Rightarrow \text{odprto } \cap X}$$

$\{X_\lambda\}$  zvezno:  $f^{-1}(U) \subseteq Y$

$$f^*(U) \cap X_\lambda = (f|_{X_\lambda})^*(U)$$

$\hookrightarrow$  zvezna  
 $\hookrightarrow$  zvezna  
 $\underbrace{\quad}_{\text{zvezna}}$

uporabimo točko b

$$f, g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) = n$$

← vložena

$$g(n) = \begin{cases} 0 & ; n = 0 \\ \frac{1}{n} & ; n \neq 0 \end{cases}$$

← ni vložena

$$f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$$

je zvitak, če je

$$f: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (f(X), \mathcal{T}_{f(X)}) \text{ homeomorfizem}$$

potrebni pogoj:  $f$  je zvezna injekcija

pogoj ni zadosten:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$



zvezna injekcija, ki ni  
vložitev

Trditelj:  $f: X \rightarrow Y$  zveza injekt sija

$$a) f(x) \text{ odg } y \Rightarrow$$

$$f \text{ je vložitev} \iff f: X \rightarrow Y \text{ odprta} \\ (\text{odprta vložitev})$$

$$b) f(x) \text{ zap } y \Rightarrow$$

$$f \text{ je vložitev} \iff f: X \rightarrow Y \text{ zaprta} \\ (\text{zaprta vložitev})$$

# Topološke lastnosti

- Zaporedje v  $\mathbb{R}^n$  ima največ eno limito

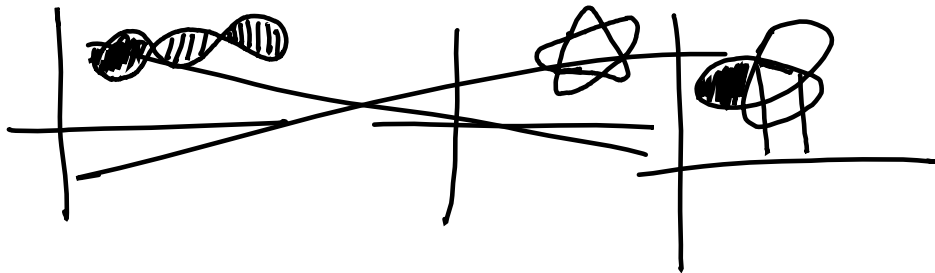


Hausdorffova lastnost

- vsako omejeno zaporedje v  $\mathbb{R}^n$  ima konvergentna podzaporedje  
(Bolzano-Weierstrassov izrek); v odzadju je dejstvo, da je vsaka omejena podmnožica v  $\mathbb{R}^n$  vsebovana v kompaktni.
- (Bolzanov izrek o vmesni vrednosti)  
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(a) \cdot f(b) < 0$   
 $\Rightarrow f$  ima ničlo  
je posledica povezanosti intervala  $[a, b]$
- Cantorjev izrek (princip sendviča)  
Presek padajočega zaporedja zaprtih intervalov je neprezen

(Baireov izrek)

Metrični prostor, ki je steven in brez  
izoliranih točk ne more biti poln



# Topološke lastnosti

- ločljivost
- povezanost
- kompaktnost
- Hausdorffova lastnost ( $\mathcal{T}$  ostro loči <sup>različne</sup> točke)  
 $(\exists U, V \in \mathcal{T} : U \ni x, V \ni y, U \cap V = \emptyset)$

$\mathcal{T}$  ostro loči  $A$  in  $B$ , če  $\exists U, V \in \mathcal{T}$

$$A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$$

$\mathcal{T}$  loči  $A$  in  $B$  če

$$A \subseteq U, B \subseteq V$$

$$U \cap B = \emptyset \wedge A \cap V = \emptyset$$

- trivialna: ne loči
- diskretna: ostro loči dve disjunktni množici
- $A \rightsquigarrow \bar{A}$  točke, ki jih  $\mathcal{T}$  ne loči od  $A$

Primer: vsi metrični prostori so  
Hausdorffovi;

Jak ne neskončni množici  $X$   
odprte množice se vedno sekajo

Trditev: Ekvivalentne so naslednje izjave

(1)  $X$  je Hausdorffov

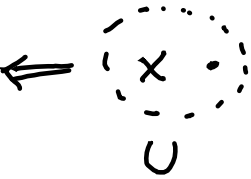
(2)  $x \neq y \Rightarrow \exists U \overset{\text{odp.}}{\ni} x, y \notin \bar{U}$   
 (ekvivalentno  $\bigcap_{x \in U} \bar{U} = \{x\}$ )

(3)  $\Delta_X : \{(x, x) \in X \times X\}$  je zaprt v  $X \times X$   
 ↑  
 diagonala v produktu  $X$

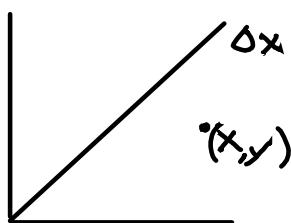
Dokaz

(1)  $\Leftrightarrow$  (2)

( $\Rightarrow$ )   $\leadsto y$  ni v zaprtju  $U$

( $\Leftarrow$ )   $y \in \bar{U}$   $\bar{U}^c$  je okolica  $y$   
 $U \cap \bar{U}^c = \emptyset$

(1)  $\Leftrightarrow$  (3)



$\Rightarrow (x, y) \notin \Delta_X \Rightarrow x \neq y \Rightarrow \exists U, V, U \cap V = \emptyset, U \ni x, V \ni y$   
 $U \cap V \ni (x, y)$  in preseku diagonale

$\Leftarrow x \neq y \Rightarrow (x, y) \notin \Delta_X \Rightarrow \exists$  ločene okolice  $U, V$ , ki vsebuje  $(x, y)$  in preseka diagonale  
 $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$

Izrek: Naj bo  $Y$  Hausdorffov

(1) končne množice  $Y$  so zaprte  
( $\Leftrightarrow$  točke so zaprte)

(2) zaporedje v  $Y$  ima največ eno limito

(3)  $f, g: X \rightarrow Y$  vzemi:

$\{x \in X; f(x) = g(x)\}$  je zaprt v  $X$

(4)  $f, g: X \xrightarrow{\text{wzno}} Y \quad A \overset{\text{gosta}}{\subseteq} X$

$$f|_A = g|_A \Rightarrow f = g$$

(5) graf preslikave  $f: X \xrightarrow{\text{(wz)}} Y$  je  
zaprt podmnožica v  $X \times Y$

(vedno mišljeno vzemo če ne reče drugače)

Dokaz:

(1)  $\forall y \neq x. \exists U. y \in U \wedge x \notin U$



$$(3) \quad X \xrightarrow{(f,g)^w} Y \times Y \quad \{x; f(x) = g(x)\} = \\ = (f,g)^*(\Delta_Y) \\ \quad \quad \quad \nwarrow \text{zaprta}$$

vzema preslika zaprte je zaprt

(4)

$$f|_A = g|_A \Leftrightarrow \begin{matrix} f|_A \\ \uparrow \\ X \end{matrix} \neq \begin{matrix} g|_A \\ \uparrow \\ X \end{matrix} \Leftrightarrow f = g$$

$$(5) \quad \Gamma_f = \{ (x, y) \in X \times Y; f(x) = y \}$$

graf je množica ujemanja  $\alpha$

funkciji  $f \circ \text{pr}_X$  in  $\text{pr}_Y$

$$X \times Y \rightarrow Y$$

in je zaprt po točki 3

$X$  je Fréchetov, če topologija  
loži različne točke

Primer:

- Hausdorffov  $\Rightarrow$  Fréchetov
- trivialni prostori niso Fréchetovi

Trditev:  $X$  je Fréchetov  $\Leftrightarrow$  enojci so  
zaprti  $(J \text{ je Fréchetov} \Leftrightarrow J_{kk} \subseteq J)$

Dokaz:  $\Rightarrow$



$\Leftarrow$

$\dot{x} \in X - \{x\}$  je odp  
 $\dot{x}_n$   
 $X - \{x\}$  je odp



Trditelj: Hausdorffova in

Fréchetova lastnost sta dedni;  
in multiplikativni (ohranjata se  
pri produktih ( $x, y$  imata lastnost  
 $\Rightarrow x \times y$  ima lastnost))

Dokaz

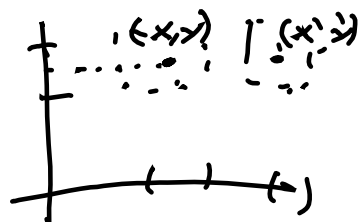
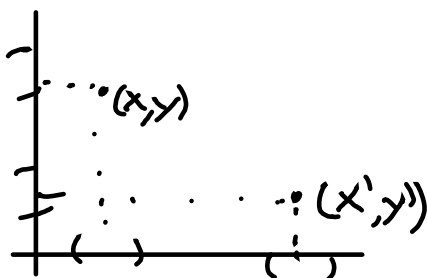
Hausdorffova je dedna


$$A \subseteq X$$
$$a \neq b \quad a, b \in X$$

$$\exists U, V \text{ od } \nu X, a \in U, b \in V \wedge U \cap V = \emptyset$$

$$\leadsto (A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$$

Hausdorffova je multiplikativna



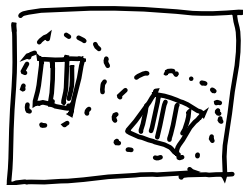
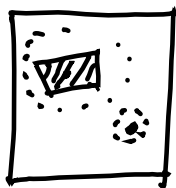
$$U \times V \cap U' \times V' = \emptyset \text{ deluje tudi \&}$$
$$\begin{matrix} x = x' \\ a \leq y = y' \end{matrix}$$

za Fréchetovo lastnost enake,  
samo spustno strogejša

$X$  je regularen topološki prostor,

če je Fréchetov in topologija  
ostro loči točke od zaprtih množic  
da so točke zaprte

$X$  je normalen, če je Fréchetov in  
topologija meeno loči (disjunktne)  
zaprte množice



Normalnost  $\Rightarrow$  regularnost  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Hausdorffova lastnost  $\Rightarrow$  Fréchetova  
lastnost

## Primer

- $J$  je Hausdorffova,  $J' \supseteq J \Rightarrow$   
 $J'$  je Hausdorffova

$(\mathbb{R}, J_{\text{ak}})$

$J'$  naj bo najmanjša, da  $J_{\text{ak}} \subseteq J'$   
in  $Q \in J'$

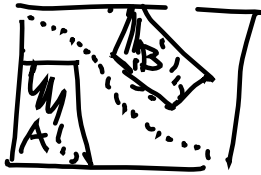
$J'$  je Hausdorffova, vendar točke

0 ne moremo ostro ločiti od  
 $\mathbb{Q}^c$  (odprta mrežica)

ker je  $\mathbb{R}$  edina odprta mrežica, ki  
vsebuje  $\mathbb{Q}$

Trditel: Všek meritični prestop je normalen

Dokaz: Frechetova lastnost ✓



$$U := \{x \in X; d(x, A) < d(x, B)\}$$

$$V := \{x \in X; d(x, A) > d(x, B)\}$$

$$A \subseteq U \quad B \subseteq V$$

$$U \cap V = \emptyset$$

U in V odprti

$$\bullet x \in U$$

$$d(x, A) < d(x, B)$$

$$r = \frac{d(x, B) - d(x, A)}{2}$$

$$K(x, r) \subseteq U$$



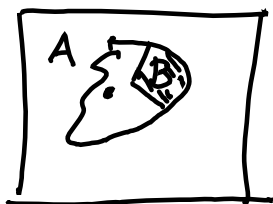
Trditvi:

1)  $X$  je regularen  $A \subseteq X \Rightarrow A$  regularen  
(regulernost je dedna)

2)  $X$  normalen  $A^{\perp} \subseteq X \Rightarrow A$  je normalen

Dokaz:

1)



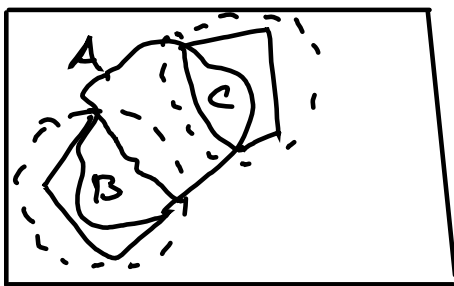
$$\exists B' \subseteq X. B = A \cap B'$$

$$\exists U \ni x \text{ od } U \subseteq X$$

$$U \cap B' \subseteq B'$$

$A \cap U$  in  $A \cap U$  a strano lažite  
 $x$  in  $B$

2)



Amplek

$B' \cap C' \subseteq$

lahko sekata i

$$A^{\perp} \Rightarrow B, C \subseteq A \Rightarrow B, C \subseteq X$$

$$T_0: \forall_{\substack{x,y \\ x \neq y}} \exists U \in \mathcal{J}, x \in U \wedge y \notin U \quad (\text{Kolmogorov})$$

$$T_1: \forall x, y \in X. \exists U, V \in \mathcal{J} x \in U \wedge x \notin V \wedge y \in V \wedge y \notin U$$

$x \neq y$  (Fréchetova lastnost)

$$T_2: \forall_{\substack{x,y \\ x \neq y}} \in X. \exists U, V \in \mathcal{J}. x \in U, y \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

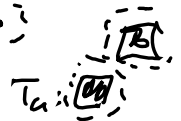
$$T_3: \forall x \in X. A^{zcl}, x \notin A. \exists U, V. x \in U, A \subseteq V. U \cap V = \emptyset$$

$$T_4: \forall A, B^{zcl} \subseteq X. A \cap B \neq \emptyset. \exists U, V \in \mathcal{J}. A \subseteq U, B \subseteq V. U \cap V = \emptyset$$

regularnost ( $T_3 + T_1$ )

normalnost ( $T_4 + T_1$ )

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$



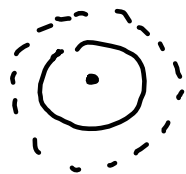
$$T_4 + T_1 \Rightarrow T_3 + T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Odstetodne dalje so prostori vedno  $T_2$

Trditev:

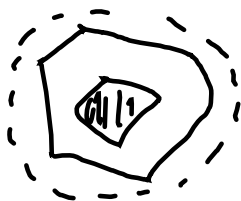
Prostor  $(X, \mathcal{J})$  je  $T_3 \iff$

$$\forall x \in U \in \mathcal{J}. \exists V \in \mathcal{J}. x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$



Prostor  $(X, \mathcal{J})$  je  $T_4 \iff$

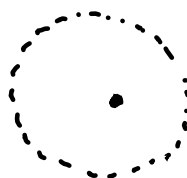
$$\forall A^{\text{zap}} \subseteq U \in \mathcal{J}. \exists V \in \mathcal{J}. A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$



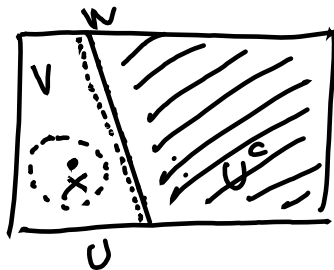
Dokaz

$\Rightarrow$

Uporabimo definicijo  $T_3$  na  $x, U^c$



$$\exists V, W. x \in W, A \subseteq V, W \cap V = \emptyset$$



$\bar{V}$  ne seka  $U^c$

$$x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$

$\Leftarrow x, A^{\text{zap}}, \emptyset, X$

$A^c(A^{\text{zap}})$  je dedica  $x$

$$x \in A^c \Rightarrow \exists V x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq A^c$$

$$W := \bar{V}^c \leadsto W^{\text{odp}} \supseteq A \quad V \cap W \neq \emptyset$$

Drugi dokaz je analogen

Trditev:  $T_3$  je multiplikativna

Posledica: Regularnost je multiplikativna  
(za  $T_1$  že vemo da je)

DN

Izrek (izrek Tihonove)

$(X, \mathcal{T})$  je regularen in 2-števen  $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$  je normalen

Dokaz:



$$x \in A. \exists U \overset{\text{odp.}}{\ni} x. \bar{U} \cap B = \emptyset$$

$\exists \mathcal{B}$  štetna baza za  $\mathcal{T}$

$$\forall y \in B. \exists V \in \mathcal{B}_y \forall V. \bar{V} \cap A = \emptyset$$

Ločiti samo A od B, ampak ne ostro

$U_1, U_2, U_3, \dots$  odprte pokrivajo A

$$\bar{U}_i \cap B = \emptyset$$

$V_1, V_2, V_3, \dots$  odprte, pokrivajo B  $\bar{V}_i \cap A = \emptyset$

$$U_1' = U_1 - \bar{V}_1$$

$$V_1' := V_1 - \bar{U}_1$$

$$U_2' = U_2 - \bar{V}_1 - \bar{V}_2$$

$$V_2' = V_2 - \bar{U}_1 - \bar{U}_2$$

$$V_3' := V_3 - \bar{U}_1 - \bar{U}_2 - \bar{U}_3$$

odprte

Pokrivajo A  
še nujnej

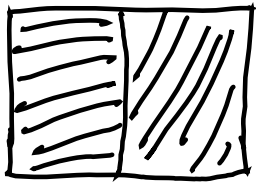
$$V = \bigcup V_i' \supseteq B$$

$$U = \bigcup U_i' \supseteq A$$

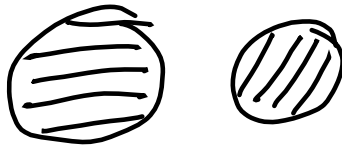
$$U \cap V = \emptyset$$

# Povezanost

Wadova jezera (Lakes of Wade)



skupna  
meja



ni skupne  
meje  
vsak je odprt

Definicija: Prostor  $(X, \mathcal{T})$  je nepovezan, če obstajata odprti množici  $A, B \in \mathcal{T}$ , da sta  $A, B$  neprazni, disjunktni in pokrivata cel prostor

$X = A + B \leftarrow$  prazen, disjunktni in  
pokrivata cel prostor

$(X, \mathcal{T})$  je povezan, če ni nepovezan

Trditve: ekvivalenčne:

1)  $(X, \mathcal{T})$  je nepovezan

2) obstajata neprezn; disjunktni;  
zaprta podmnožici  $A, B$   $X = A \cup B$

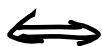
3) obstaja prava, neprazna odprto zaprta  
podmnožica  $A \subset X$

4)  $\exists$  zveza surjektivne preslikave  
$$f: X \longrightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{dis})$$

$X$  je povezan  $\Leftrightarrow$  ne obstaja (netrivialni)  
razcep na dve odprti množici



ne obstaja (netrivialni) razcep na dve  
zaprti množici



ne obstaja netrivialna odprto-zaprtá  
množica



ne obstaja zvezna surjekcija

$$X \rightarrow \{0, 1\}$$

Izrek:  $X \subseteq \mathbb{R}$  je povezano  $\Leftrightarrow X$  je interval

Dokaz:

Značilnost intervala  $a, b \in I, a < b$

$$\forall a \leq c \leq b \Rightarrow c \in I$$

$X$  ni interval  $\Rightarrow \exists a < b < c, a, b \in X, c \notin X$

$$X = \underbrace{X \cap (-\infty, c)}_{a \in \uparrow} \cup \underbrace{X \cap (c, \infty)}_{b \in \uparrow}$$

netrivialni: razcep na dve odprti podmnožici

$\Leftarrow$   $X$  intervali, ki ima netrivialni razcep  
na dve odprte-zaprte podmnožici

$$X = \bigcup_{a \in \downarrow} \cup \bigcup_{b \in \uparrow}$$

$$c = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid [a, x) \subseteq U\} \quad c < b$$

$c \in X$   $c \in U$ , ker je  $U$  zaprta

$U$  je odprta  $\Rightarrow (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq U$   $\times$

Izrek:

①  $f^w: X \rightarrow Y$   $X$  je povezan  $\Rightarrow f^w(X)$  je povezan

Torej: povezanost je topološka lastnost

② Naj bo  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  družina podmnožic v  $X$   
 $\bigcap A_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup A_\lambda$  je povezan

③ Produkt povezanosti je povezan

④ Če za poljubna  $a, b \in X$  obstaja pot od  $a$  do  $b$  (pot v  $X$  je  $\gamma: [0,1] \xrightarrow{\text{vzra}} X$   
 $\gamma(0)=a$   $\gamma(1)=b$ )

$\Rightarrow X$  je povezan

⑤ Če je  $A \subseteq X$  povezana,  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$   
 $\Rightarrow B$  je povezana

Dokaz:

①  $y = U + V$  <sup>od  $a$</sup>  <sup>od  $b$</sup>  netrivialni razcepi

$$f^*(U) + f^*(V) = X$$

$$y \xrightarrow{\text{sur}} \{0,1\}$$

$$\begin{matrix} \text{sur} \uparrow \\ f \\ X \end{matrix}$$

$\Rightarrow X$  je razcepi

②

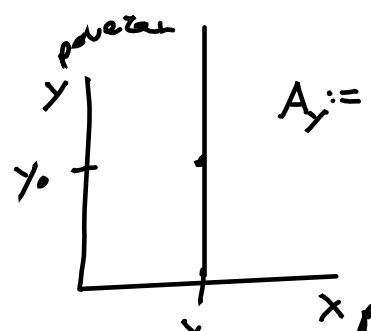
$$\bigcap A_\lambda \neq \emptyset$$

$$s^w: \bigcup A_\lambda \rightarrow \{0,1\}$$

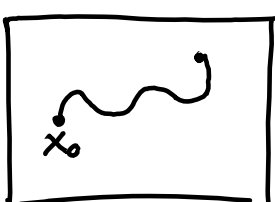
$$s(a) \text{ je } 0 \text{ ali } 1$$

$$\sim \forall \lambda \ s(A_\lambda) = \{0\}$$

$$\Rightarrow s(\bigcup A_\lambda) = \{0\} \Rightarrow s \text{ ni surjektivna}$$

③   $A_j = \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\}$   
 Unija je povezana, ker imata neprazen presek  
 Unija vsebuje  $(x_0, y_0)$

Uporabimo točko 2

④  Recimo da  $X$  ni povezan.  
 Potem obstaja zvezna surjekcija  
 v  $\{0,1\}$

$$\exists a, b, s(a)=0, s(b)=1$$

$$\exists \gamma: [0,1] \rightarrow X \ \gamma(0)=a \ \gamma(1)=b$$

$$[0,1] \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{s} \{0,1\}$$

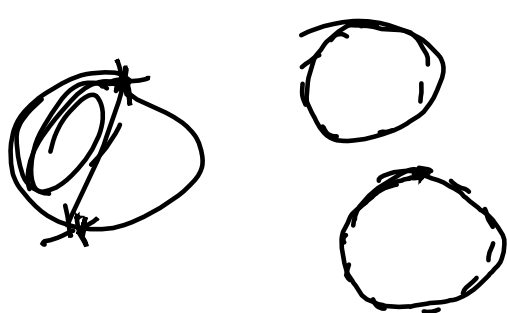
$s \circ \gamma$  je zvezna surjekcija, ~~ker je~~  
 ~~$X$~~  ker je interval povezan.

⑤  $B = U \overset{\text{od } a}{\cup} + V \overset{\text{od } b}{\cup}$  <sup>od točk v  $B$</sup>  <sup>neprazne</sup>

$$A = A \cap U + A \cap V$$

$$\uparrow \text{od točk v } A \quad \nwarrow \text{od točk v } A$$

Neprazni, ker je  $B$  pod zapolnjen  $A$



Primeri:

Vsaka konveksna podmnožica v  $\mathbb{R}^n$  je zvezna

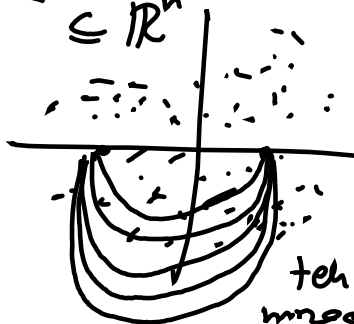
Vsaka zvezda je povezan



Komplement stvarne množice  
v  $\mathbb{R}^n$   $n \geq 1$  je povezan

$Q^{\text{stvarne}} \subseteq \mathbb{R}^n$

$a, b \in \mathbb{R}^n - Q$



teh ločav je nestvarno  
množica  
ker je  $Q$  samo stvarno  
obstaja veliko poti samo iz  
 $\mathbb{R}^n - Q$  do sta  $a, b$  povezan

Za  $n \geq 1$   $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$

Denimo nasprotko

$$f: \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

$f(0)$

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{f(0)\}$$

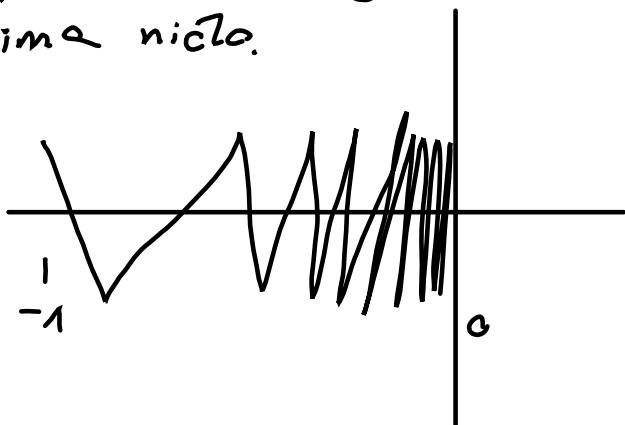
↑  
nepovezan

↑  
povezan

Izrek o vmesni vrednosti:

$$f^w: X^{\text{pov}} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f_x(x) = \text{interval}$$

posebej: če zloga vrednost vsebuje pozitivne in negativne vrednosti, potem  $f$  ima ničlo.



$$f: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f_x([[-1, 0])) = L \text{ parazna}$$

$\bar{L} = L \cup \{0\} \times [-1, 1]$  je parazna ker  
je zaprtje od  $L$  parazne

vendar ne obsega pot med  $(-1, 1)$  in  
kateraki točko na  $\{0\} \times [-1, 1]$

Dokaz:

Pri vzemimo:

$$(g_1, g_2) \gamma: [0, 1] \longrightarrow \overline{L}$$

$$\gamma(0) = (-1, 1)$$

$$\gamma(1) = (0, 0)$$

$$\gamma_1^*(0) \subseteq [0, 1]$$

$$m := \min \gamma_1^*(\xi_0)$$

$$[0, 1] \longrightarrow \overline{L}$$

$$[0, m) \longrightarrow L$$

$\gamma$  ni zvezna v  $m$ .

ne  $\forall$  delici  $(m-\varepsilon, m+\varepsilon)$  zveze  $\gamma_2$   
vse vrednosti med  $-1$  in  $1$  v nasprotju  
z zveznostjo  $\gamma_2$

Prostor  $X$  je povezan splošno, če med poljubnima  $a, b \in X$  dosežejo pot v  $X$  od  $a$  do  $b$

Trditev:

$X$  pot s potmi  $\Rightarrow X$  povezan

$\Leftarrow$   
ne velja nujno

Dokaz:

Recimo da ni povezan

$a \in A$   $b \in B$

$\gamma(a) = a$

$\gamma(b) = b$

$f^*(A)$  od  $\gamma$  te

$f^*(B)$  od  $\gamma$  te

$\rightarrow \times$

# Komponente

$$x \in X$$

$C(X) :=$  unija vseh povezanih podmnožic  
celega  $X$ , ki vsebujejo  $x$

Trditve: lastnosti komponent

1)  $x \in C(x)$

2)  $C(x)$  je povezana

3)  $C(x)$  je maksimalna povezana podmnožica

4)  $C(x)$  je zgrpa v  $X$

Dokaz:

1)  $C(x) = \bigcup U_i$      $U_i \dots$  povezana podmnožica

$U_i \cap U_j \neq \emptyset$  ker  $x \in U_i \cap U_j$

3)  $C(x)$  je zgrpa

$$\bigcup_i U_i \cap \bigcup_j U_j \neq \emptyset \quad x \in U_i \cap U_j$$

Primer:

- v diskretnem prostoru so komponente točke
- komponente  $\mathbb{Q}$  so tudi točke, ker so  
diskretna parčna podmnožice  $\mathbb{R}$  intervali:
- $X$  je parsem nepovezan, če so komponente  $X$   
enajdi

Trditel:

$$f^n: X \longrightarrow Y$$

$C(X)$  komponente  $X \Rightarrow$

$$f_* (C(X)) \subseteq C(f(X)) \text{ komponente v } Y$$

Trditel: Komponente tvorijo partitijo  $X$  ne disjunktne podmnožice

Dokaz:

$$C(X_1) \cup C(X_2) \cup \dots$$

$$C(X_1) \cap C(X_2) \neq \emptyset \Rightarrow C(X_1) = C(X_2)$$

$$C(X_1) \subseteq C(X_1) \cup C(X_2)$$

↑  
povezano

$$x \sim x' \iff \exists A^{\text{pov}} \subseteq X. x, x' \in A$$

komponente so ekvivalentni razred:

komponente @ so enojčki, če so odprte vendar niso odprte

Če  $X$  ima končno mnogo komponent so komponente odprte, ker je vsake komplement unije ostalih

$X$  je lokalno povezan, če ima  $\forall x \in X$

$\forall U \ni x. \exists V^{\text{pov}}. x \in V \subseteq U$  (če za  $\forall$  okolico  $x$  obstaja manjša povezana okolica)

Oziram  $X$  ima brez izpavezenih množic

$X$  je lokalno povezan s potmi: če ima brez iz množic, ki so povezane s potmi

Primer:

- Odprte mn. v  $\mathbb{R}^n$  so lokalno povezane (sptni.)
- $\mathbb{Q}$  ni lokalne povezane
- diskretni prostor je lokalno povezan ni pa povezan
- povezan, ni pa lokalno povezan:



v velkem je povezan,  
lokalno pa ni

Trditev:

$X$  lokalno povezan  $\Rightarrow$  komponente  $X$  so odprte

$X$  lokalno povezan  $\Leftrightarrow$  komponente  $\forall$  odprte množice  $U \subseteq X$  so odprte

Dokaz:  $(\Rightarrow) \cup \text{odp} \subseteq X$  baza iz povezanih množic  $\mathcal{A}$   
 $\leadsto$  dobimo bazo iz povezanih  $\mathcal{Z}$   $U$

$(\Leftarrow)$   $\mathcal{B} = \{\text{komponente odprtih množic } U \subseteq X\}$

odprte po prireženju

povezave ker se komponente

baze, ki je vsaka odprta množica unija svojih komponent

■  
To je karakterizacija prostora  $(\Leftarrow)$   
neredno s tem močnejšo bazo

Trditev:

Če je  $X$  lokalno povezan s potmi,  
potem so komponente  $X =$   
komponente  $X$  za povezanost s potmi:

Dokaz:

$X$ ,  $C$  komponente od  $X$

morda ima  $C$  več potnih komponent

$C'$  potne komponente za  $C$

ker je  $X$  lokalno povezan s potmi:

$\Rightarrow$  potne komponente so odprte

$C'$  je komplement unije ostalih potnih

komponent  $\leadsto C'$  je komplement odprte

manjzice  $\Rightarrow C'$  je zaprta

$C'$  je odprta in zaprta v  $C$ , ki je povezan

in neprazen  $\Rightarrow C' = C$

Posledice:

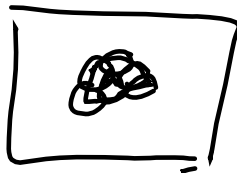
$X$  je lokalno povezan s p.d.m.:  $\Rightarrow$   
( $X$  je povezan  $\Leftrightarrow X$  je povezan s p.d.m.)

Posledice: Odprte mrežice v  $\mathbb{R}^n$  so  
povezane  $\Leftrightarrow$  t.j. so povezane s p.d.m.

# Kompaktnost

Prostor  $X$  je kompakten, če v vsakem odprtem pokritju obstaja končno podpokritje

- dovolj je gledati pokritja z bazisom; okolice;
- Kompaktnost podprostore  $A \subseteq X$  lahko testiramo na odprtih pokritjih v  $X$



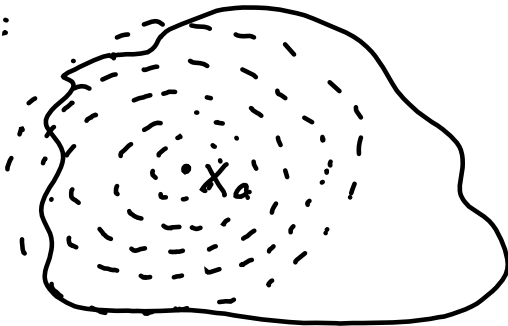
## Primer

- vsake končne množice je kompaktna
- $\{1, 1/2, 1/3, \dots\} \cup \{0\}$  je kompaktna  
↑  
limite
- $\mathbb{R}$  ~~niso~~ kompaktni

Trditev:

V metričnih prostorih je vsaka kompaktna množica omejena

Dokaz:



$$K(x_0, 1) \subseteq K(x_0, 2) \subseteq \dots$$

$$\bigcup K = X$$

če  $X$  ni kompaktna, potem so vse točke

vsebovane v nekončni množici

*Handwritten signature*

härskas

härskas go kompletten

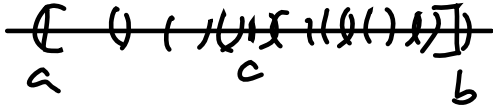
Rokas



härskas go kompletten

kerék:  $[a, b]$  je kompakter

*Rede*



W odg. to powstaje z  $[a, b]$

$$c := \sup \{x \mid [a, x] \text{ ist kompakt abgeschlossene v. U.}\}$$

$$c \in U \in \mathcal{U}$$

$$\exists \varepsilon > 0. (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq U$$

$[a, c - \frac{\epsilon}{2}]$  ima levo podpodzivanje

$\{u_1, \dots, u_n\} \rightsquigarrow \{u_1, \dots, u_n, u\}$  je konačno  
podskupine za  $[a, c + \frac{\epsilon}{2}]$

če c**č**o debimo protislovje

Trditev: Zveza slik kompaktnih je kompaktna

Dokaz:  $f^w: X \xrightarrow{\text{sur. hom}} Y$   $Y$  je kompaktna

$\mathcal{U} \dots$  odprto pokritje za  $Y$

$\{f^*(U) ; U \in \mathcal{U}\}$  je odprto pokritje za  $X$

$\{f^*(U_1) \dots f^*(U_n)\}$  končno pokritje za  $X$

$U_1 \dots U_n \dots$  končno pokritje za  $Y$

Trditev: Zaprta podmnožica  
kompakta je kompaktna

Dokaz:



$\mathcal{U}$  ... pokritje  $A$  z odprtimi:  
 $\cup X$

$$\mathcal{U} \cup \{X - A\}$$

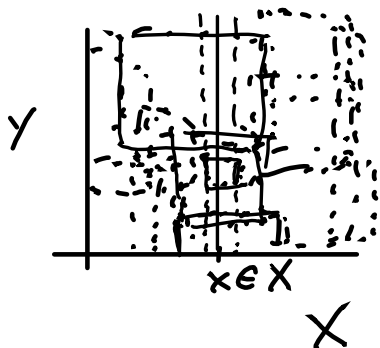
odprto pokritje  $X$

$X$  ima končno podpokritje  $U_1, \dots, U_n$

Če je  $U_i = X - A$   $\forall i = 1, \dots, n$ , ostane  
končno podpokritje  $\alpha A$

Izrek:  $X, Y$  kompaktna  $\Rightarrow X \times Y$  kompaktna

Dokaz: Naj bo  $\mathcal{U}$  poljubno pokritje  $X \times Y$  s škatlami:



$$\{x\} \times Y$$

$$\mathcal{U} = \{U_\lambda \times V_\lambda; U_{\alpha \in \lambda} \subseteq X \quad V_{\alpha \in \lambda} \subseteq Y\}$$

obstajajo  $\{U_{\lambda_1} \times V_{\lambda_1} \dots U_{\lambda_n} \times V_{\lambda_n}\}$  ki pokrije  $\{x\} \times Y$

← je odprto

$$U_x = U_{\lambda_1} \cap \dots \cap U_{\lambda_n} \quad (\text{najmanjši pas})$$

$U_x \times Y$  ima končno podpokritje

$\{U_x \mid x \in X\}$  je odprto pokritje za  $X$

$\{U_{x_1} \dots U_{x_n}\}$  je končno podpokritje

Vsake izmed stolpcev  $U_{x_1} \times Y, \dots, U_{x_n} \times Y$  je pokrit s končno mnogimi škatlami iz  $\mathcal{U}$ , torej je to končno podpokritje

Posledica:  $X_1 \dots X_n \text{ komp} \Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n \text{ kompakten}$

Opomba: Poljubni produkt kompakto je kompakten

Posledica: V zaprta in omejena podmnožica v  $\mathbb{R}^n$  je kompakten

Dokaz:  $X^{\text{omejena}} \Rightarrow X \subseteq [a, b]^n$

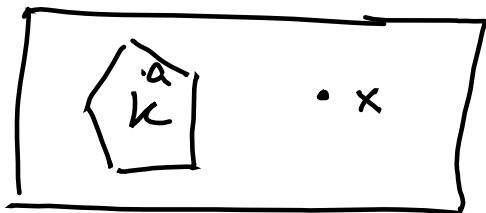
$X^{\text{zaprta}} \Rightarrow X \text{ kompakten} \quad \hookrightarrow \text{kompakten}$



Trditev:

$X$  Hausdorff,  $K^{\text{komp.}} \subseteq X \Rightarrow K$  zaprta v  $X$

Dokaz



$\forall a \in K. \exists U_a, V_a. a \in U_a, x \in V_a. U_a \cap V_a = \emptyset$

$\{U_a \mid a \in K\}$  so odprto pokritje kompakte  $K$

$\leadsto \{U_{a_1}, \dots, U_{a_n}\}$  končno podpokritje

$V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \dots \cap V_{a_n}$  so odprta okolice

točke  $x$ , ki ne seka  $K$

Komplement je odprt



Opomba: S tem prejšnjim dokazom smo dokazali, da v Hausdorffovi topologiji ostro loči točke od kompakta

Izrek (Heine-Borel-Lebesgue)

Podmnožica v  $\mathbb{R}^n$  je kompaktna  $\Leftrightarrow$  ko je zaprta in omejena

Opomba:

$M$  metričen.

Zaprte krogle so kompaktna  $\Leftrightarrow$  velja

Heine-Borel-Lebesgue izrek za ta prostor

Posledice:

$X^{\text{Komp}} \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \forall f^{\text{zw}}: X \rightarrow \mathbb{R}$  je omejena

ter zavzame minimum in maksimum

Dokaz:

$f^*(X)$  je kompaktno v  $\mathbb{R}$ , torej omejeno,

torej ima inf in sup, ker je zaprt sta inf in sup elementa zaloge vrednosti, torej sta minimum in maksimum

Trditev: v kompaktni ima  $\forall$  neskončno množico stekel:šče

Dokaz: Naj bo  $X \stackrel{\text{komp}}{\supseteq} A$  brez stekel:šče

$\forall x \in X. \exists U_x \ni x. U_x \cap A$  je končna za  $X$ .

$\{U_x \mid x \in X\}$  odprto pokritje za  $X$

$\leadsto U_{x_1} \dots U_{x_n}$  pokritje za  $X$  (in za  $A$ )

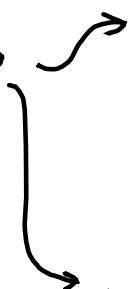
$\leadsto A$  je končna



# Posledica: (Bolzano-Weierstrass)

Vsako omejeno zaporedje v  $\mathbb{R}^n$  ima konvergentne podzaporedje

Dokaz:  $x_1, x_2, x_3, \dots \subseteq [a, b]^n$

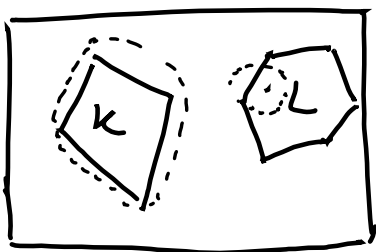
ločimo 

- množica elementov zaporedja je končna (vsaj kakšen se ponovi neskončnokrat). konstantno podzaporedje je konvergentno.
- množica elementov je neskončna, ima stekališče, ki je limita nekega podzaporedja

Izreči:

Prostor ki je kompakten in Hausdorffov  
je normalen

Dokaz:



$$\forall x \in L. \exists U_x, V_x. K \subseteq U_x \\ x \in V_x. U_x \cap V_x = \emptyset$$

$\{V_x \mid x \in L\}$  je odprto pokritje za  $L$

ker je  $L$  kompakten  $\exists V_{x_1}, \dots, V_{x_n}$  končno

pod pokritje  $U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n}$  je odprta  
okolica za  $K$  in  $V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$  je odprta okolica  
za  $L$  in sta si disjunktni.

S tem smo dokazali, da v Hausdorffovi  
topologiji ostro loči kompakte.

$X$  kompakten, Hausdorffov

$A, B$  zap. disjunktni  
 $\subseteq X \Rightarrow A, B$  kompaktni

$\exists U, V$  <sup>odp.</sup>  $A \subseteq U, B \subseteq V. U \cap V = \emptyset$

$X^{\text{komp}}: \forall \text{ odp. pokr. tje } \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup U_\lambda = X$   
 $\exists \text{ podpokr. tje } \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}\}$



$\{U_\lambda^c\}_{\lambda \in \Lambda}$  ~~cap~~ tje  $\bigcap_\lambda U_\lambda^c = \emptyset$

$\exists U_{\lambda_1}^c \cap \dots \cap U_{\lambda_n}^c = \emptyset$

1  
Trditev:  $X$  je kompakten  $\iff$  v  $\forall$  družini  
zaprtih podmnožic s praznim presekom  
obstaja končna poddružina, katere presek  
je tudi prazen

Dokaz

## Posledica (Cantorjev izrek)

$$X^{\text{komp}} \quad F_1^{\text{zap}} \supseteq F_2^{\text{zap}} \supseteq \dots$$

padejoče zaporedje zaprtih nepraznih podmnožic

$$\Rightarrow \cap F_i \neq \emptyset$$

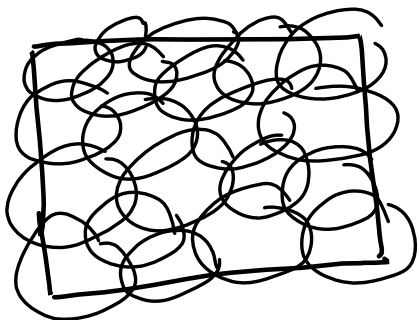
Dokaz: Če bi veljalo, da je  $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ ,

potem bi imele neko končno podskupino

$F_{i_1} \dots F_{i_n}$  ki bi imele prazen preselek  $= F_{i_n}$

~~X~~

Cilj:  $f^{\text{zw}}: X^{\text{komp, metr}} \rightarrow Y^{\text{metr}} \Rightarrow f \text{ enakomerno zvezna}$



Def  
~~Trditveni~~: če je  $U$  odprto pokritje za  $X$   
 Lebeguevo  
 $\lambda > 0$  je Lebesgueovo število pokritja  $U$ ,  
 če  $\forall$  podmnožice  $S$  premera  $< \lambda$  leži  
 v celoti v enem elementu  $U$

Trditveni: za  $\forall$  odprto pokritje kompaktnega  
 metričnega prostora vsebuje Lebegueovo  
 število

Dokaz:

$U$  odprto pokritje za  $X^{\text{komp}}$   
 $U_1, \dots, U_n$  kakšno podpokritje

$$\forall x \in X. \max_{1 \leq i \leq n} \{d(x, U_1^c) d(x, U_2^c) \dots d(x, U_n^c)\} =: f(x)$$

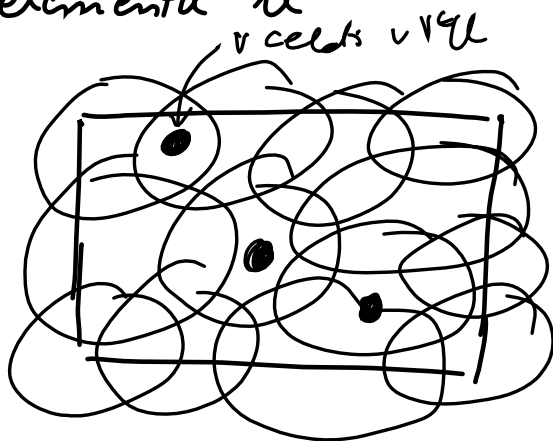
$f$  je zvezna:  $X^{\text{komp}} \rightarrow \mathbb{R} \quad f > 0$

$f$  zavzame minimum  $\lambda = \min f(x) > 0$

Lebesgueva lema

$X^{\text{komp, metr}}$ , za  $\forall$  odprto pokritje  $\mathcal{U}$   $\exists$

Lebesgueovo število  $\lambda > 0$ , da je  $\forall$   
množica  $Z$  diam  $< \lambda$  vsebovana v nekem  
elementu  $U$



Posledica:

$$f: X^{\text{top, metr}} \longrightarrow Y^{\text{metr}}$$

je enakomerno zvezna

Dokaz:

$\varepsilon > 0$ .  $Y$  pokrijemo s krogli:  $\{K(y, \frac{\varepsilon}{2}) \mid y \in Y\}$

$\leadsto \{f^*(K(y, \frac{\varepsilon}{2})) \mid y \in Y\}$  so pokritje  $X$

$\delta :=$  lebesguejevo število tega pokritja

$$d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

(ker sta v isti krogli)



$X$  je lokalno kompakten če ima  
 $\forall$  točka  $x$  kompaktno okolico

$$\text{i.} \quad \forall x \in X. \exists K^{\text{komp}} \subseteq X. x \in \text{int} K$$

Prizeteki:  $X$  hausdorffov  
če ima topologija baze iz relativno  
kompaktnih odprtih množic

↓  
(njeno zaprtje  
je kompaktno)

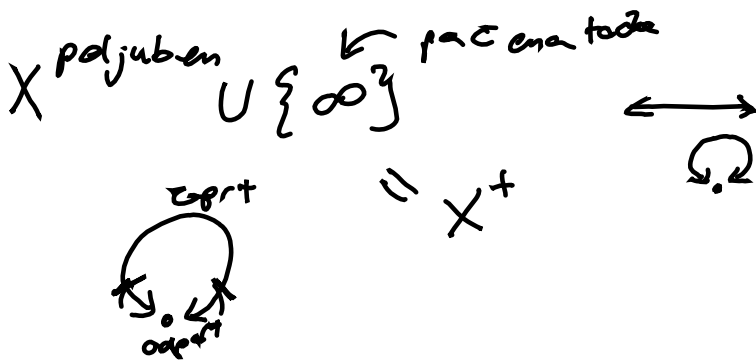
Zgled

- $\mathbb{R}^n$  kompakten je lokalno kompakten
- $\mathbb{R}^n$  je lokalno kompakten
- diskreten prostor je lokalno kompakten
- $\mathbb{Q}$  ni lokalno kompakten

Trditvi:

$X$  lokalno kompakten in Hausdorff

$\Rightarrow X$  regularen



$$(X, \mathcal{T}) \rightsquigarrow (X^+, \mathcal{T}^+)$$

$$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T} \cup \underbrace{\text{okolišne točke } \infty}_{\text{vse množice oblike}}$$

$$\{ \infty \cup K^c \mid K \text{ je kompaktna v } X \}$$

$\mathcal{T}^+$  je topologija na  $X^+$

• rutinsko preverjanje

$X^+$  je kompakten

$\mathcal{U}$  odprto pokritje za  $X^+$

$$\infty \in U \in \mathcal{U}$$

$U^c$  je kompaktna in ima končno podpokritje iz  $\mathcal{U}$

$X^+$ ... kompaktnifikacija z eno točko  
oz kompaktnifikacija Aleksandrova

Operabimo enotrditev naprej  $\rightarrow$

$X$  lokalno kompakten, Hausdorff  $\rightsquigarrow$

$X^+$  kompakten, Hausdorff  $\rightsquigarrow$

$X^+$  normalen (torej regularen)  $\rightsquigarrow$

$X$  regularen, ker je regularnost dedna

Primer:

•  $X$  stavna diskretna  $\Rightarrow X^+ \approx \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \cup \{0\}$

•  $X = (0, 1) \Rightarrow X^+ \approx S^1$

•  $\mathbb{Q}^+$  ni hausdorfer

.....

• stavne vseublizirane točke

Trditev:

$X$  lokalno kompakten, Hausdorff  $\Leftrightarrow$

$X^+$  je kompakten, Hausdorff

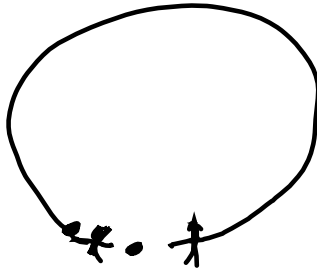
Dokaz:

$$x, x' \in X$$

$$x \in X, \infty$$

$$x \in \text{Int } X, K^{\text{komp}} \subseteq X$$

$$\text{Int } K, \underbrace{K^c}_{\psi \atop X} \cup \underbrace{\{\infty\}}_{\psi \atop \infty} \text{ sta disjunktni; } \forall X^+$$



Izrek: (Baireov izrek)

$X$  lokal. komp., Hausdorffa  
(velja tudi za polne metrične prostore)

$F_1, F_2, F_3, \dots$  zaporedje zaprtih množic  
s prazno notranjostjo

$\Rightarrow F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots$  ima tudi  
prazno notranjost

Temu rečemo Baireova lastnost

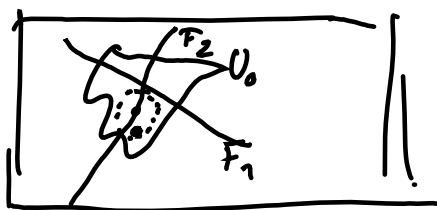
Dokaz:

$$U_0^{\text{odp}} \subseteq X$$

$$x_1 \in U_0 - F_1$$

$\leadsto \exists U_1, \bar{U}_1$  kompaktna,  $x_1 \in U_1$

$$U_1 \cap F_1 = \emptyset$$



$$\exists x_2 \in U_1 - F_2, \exists U_2, \bar{U}_2 \text{ komp. } x_2 \in U_2$$

$\bar{U}_1 \supseteq \bar{U}_2 \supseteq \bar{U}_3 \supseteq \dots$  padajoče zaporedje  
kompaktov,  $\bigcap \bar{U}_i \neq \emptyset$

$\leadsto U_0$  ni pokrit z  $\{F_i\}$

(vsej ena točka iz  $U_0$  ni v  $\{F_i\}$ )

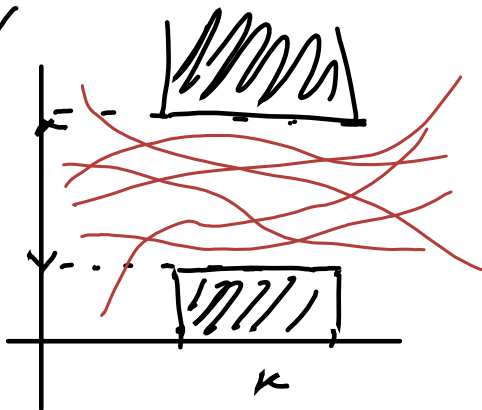
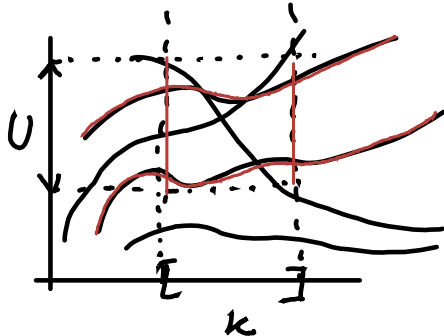
# Prostori preslikav

$X, Y$  prostora

$\leadsto C(X, Y)$  množica, ki jo opremimo  
z neko topologijo  
(prostori Soboleva)

$$\langle K, U \rangle := \{ f: X \rightarrow Y \mid f(K) \subseteq U \}$$

$$K^{komp} \subseteq X, U^{odp} \subseteq Y$$



$$\langle K, U \rangle \subseteq C(X, Y)$$

Kompaktno odprta topologija je topologija  
ki jo generira pred baza  $\{ \langle K, U \rangle; K^{komp} \subseteq X, U^{odp} \subseteq Y \}$   
(co-topologija)

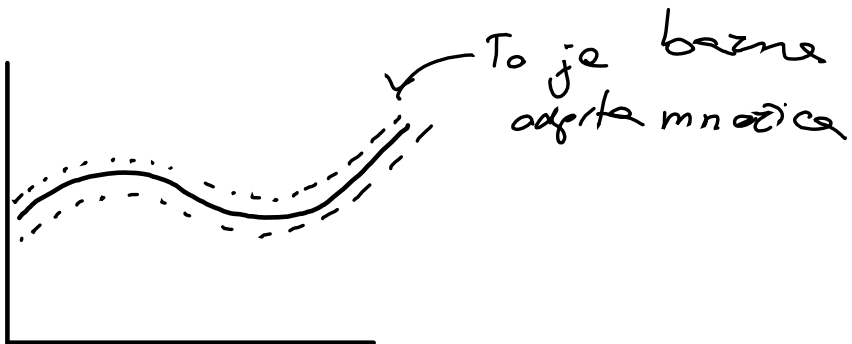
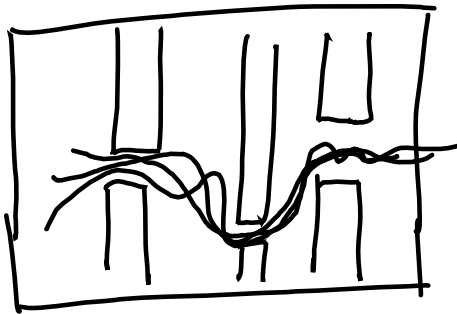
$C(X, Y)$

predbaze:  $\{ \langle K, U \rangle \mid K \text{ komp } \subseteq X, U \text{ otv } \subseteq Y \}$

$$\langle K, U \rangle := \{ f: X \rightarrow Y; f(X) \subseteq U \}$$

$J_{co}$  .... kompaktno odprta topologija  
na  $C(X, Y)$

$J_{co}$  ustreza „topologiji enakomerne  
konvergence na kompaktnih



Baza:

$$\langle f, k, \varepsilon \rangle = \{ g: X \rightarrow Y^{\text{metr}} \mid d(g(x), f(x)) < \varepsilon \text{ } \forall x \in k \}$$

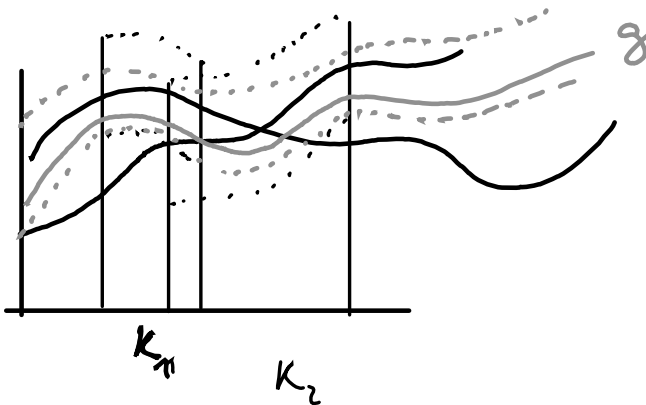
$$\mathcal{B} = \{ \langle f, k, \varepsilon \rangle \mid f \in C(X, Y); k^{\text{komp}} \subseteq X, \varepsilon > 0 \}$$

Trditev:  $Y$  metričan  $\Rightarrow J_{\mathcal{C}O} = \text{top. enostavno konvergenca na kompaktnih}$

Dokaz

$\{ \langle f, k, \varepsilon \rangle \}$  je res baza

$\langle f_1, k_1, \varepsilon_1 \rangle \cap \langle f_2, k_2, \varepsilon_2 \rangle \ni g$  Recimo da je presjek neprazen



$$\langle g, k_1 \cup k_2, \min \{ \varepsilon_1 - \max_{x \in k_1} \{ d(f_1(x), g(x)) \}, \varepsilon_2 - \max_{x \in k_2} \{ d(f_2(x), g(x)) \} \} \rangle$$

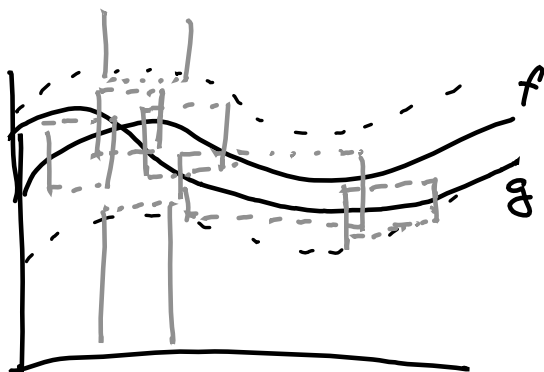
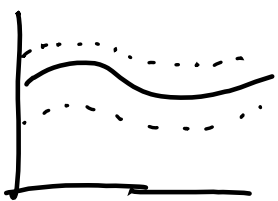
Pozor! fje: očitno

$$\underline{\underline{J_{co} \subseteq J_{e,k,k}}}$$

$$\langle k, k(y, \epsilon) \rangle = \langle c_y, k, \epsilon \rangle$$

$$y \in \frac{[L, \dots, 1]}{[1, \dots, 1]}$$

$$J_{e,k,k} \subseteq J_{co}$$



$$c \in K \quad U_c = \{x \in K \mid d(f(x), g(c)) < (e - d(f(c), g(c)))^2\}$$

$\Rightarrow \exists$  končno podskupitev za  $K$   
 dolžne  $U_{c_1}, \dots, U_{c_n}$  za  $K$

← zaprt v  $K$

$$f, g \in \langle \bar{U}_{c_1} \cap K, k(g(c_1), \frac{\epsilon}{2}) \rangle \cap \dots \cap \langle \bar{U}_{c_n} \cap K, k(g(c_n), \frac{\epsilon}{2}) \rangle$$

$$U_c \text{ leži v } J_{co} \quad \bigcap \langle f, k, \epsilon \rangle$$

lahko ni prava?

Dokazujemo da v vsaki bazi: mrežici  
 ostaja baze mrežica

$$\{C(X, Y), \mathcal{T}_{co}\}$$

$$Y \hookrightarrow C(X, Y)$$

$y \mapsto c_y$  - konstantna funkcija pri  $y$

$i$  je vložitev

$$i^* \langle K, U \rangle = U \quad \langle K, U \rangle \cap i(Y)$$

$Y$  lahko gledamo kot podprostor v  $C(X, Y)$

Trditel:

a)  $C(X, Y)$  je Hausdorfov  $\Leftrightarrow Y$  je Hausdorfov

b)  $C(X, Y)$  je regularen  $\Leftrightarrow Y$  je regularen

Dokaz:  $f, g \in C(X, Y)$   $f \neq g$

$$\exists x. f(x) \neq g(x)$$

Naj bosta  $U, V \subseteq Y$

$$f(x) \in U, f(y) \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

$$\begin{array}{ccc} \langle \{x\}, U \rangle & & \langle \{x\}, V \rangle \\ \downarrow f & & \downarrow g \end{array}$$

b) DN. ■

# Preslikave na normalnih prostorih

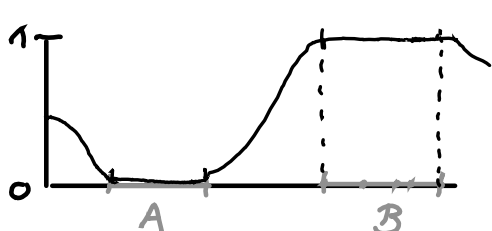
Kdaj obstajajo nekonstantne

preslikave  $f: X \longrightarrow Y$   
( $\mathbb{R}$ )

Izrek: (Urysonova Lema)

$X$  je  $T_u \iff$  za  $A, B \subseteq X, A \cap B = \emptyset$ .

$\exists f^w: X \longrightarrow [0,1], f_*(A)=0, f_*(B)=1$



Dokaz:

( $\Leftarrow$ ) Topologija ostro loči disjunktne odprte množice

$A, B$  odp  $A \cap B = \emptyset$

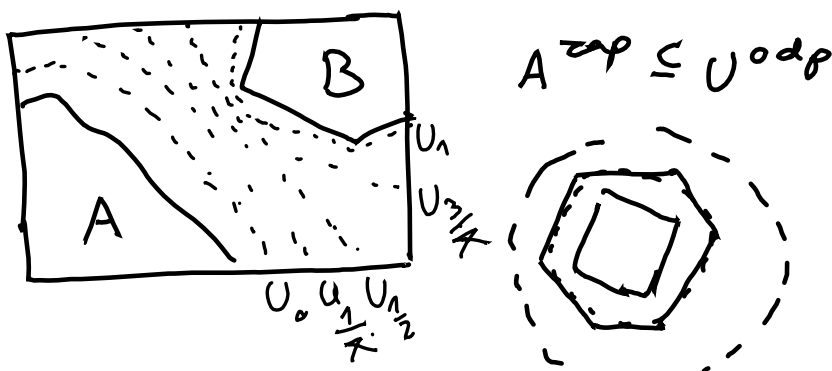
$f^w: X \longrightarrow [0,1], f_*(A)=0, f_*(B)=1$

$f^{-1}([0, \frac{1}{2})) = U \supseteq A$

$f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) = V \supseteq B$

$U \cap V = \emptyset$

( $\Rightarrow$ )



$\exists V. A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

$U_i = X - B$

$A \subseteq U_1, \exists U_0. A \subseteq U_0 \subseteq \bar{U}_0 \subseteq U_1$

$\bar{U}_0 \subseteq U_{1/2} \subseteq \bar{U}_{1/2} \subseteq U_1$

$\bar{U}_0 \subseteq U_{1/4} \subseteq \bar{U}_{1/4} \subseteq U_{1/2} \subseteq \bar{U}_{1/2} \subseteq U_{3/4} \subseteq \bar{U}_{3/4} \subseteq U_1$

$\leadsto \{U_r \mid r \text{ je dvojiski ulomek } (r = \frac{k}{2^n})\}$

odp v  $X, r < s \Rightarrow \bar{U}_r \subseteq U_s$

$f(x) := \begin{cases} \inf \{r \mid x \in U_r\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$

$f: X \longrightarrow [0,1], f(A)=0, f(B)=1$

$f$  je wenu

$x \in X, f(x) \in (0,1)$

$\varepsilon > 0$

$f(x) - \varepsilon < r < f(x) < s < f(x) + \varepsilon$   
 $\uparrow \quad \quad \uparrow$   
dvojiski ulomek

$U_s - \bar{U}_r$  je neprazna odprta množica v  $X$

$(X, d)$  metrike

$A, B$  zap. dişi  $\subseteq X$

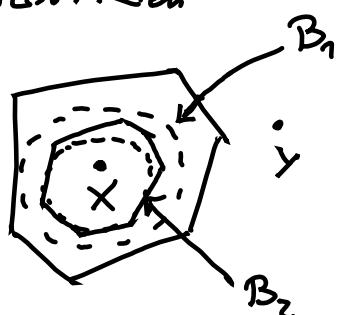
$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \text{ je wera}$$

$$f(A) = 0$$

$$f(B) = 1$$

Cilj: Pokazati da prostor, ki je normalen in dva steven je metrizabilen

$X$  normalen



zaprta  
 $X - B_1 \ni y$

$$\exists f: X \rightarrow [0, 1]$$

$$f(B_2) = 0 \quad f(X - B_1) = 1$$

To lahko naredimo za poljubni bazisni okoliš  $B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2$

V 2-stevnem normalnem prostoru dostajajo steven nebes končnih funkcij

$$f_1, f_2, f_3, \dots$$

Vsaki točki priredimo zaporedje

$$x \in X \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots)$$

$\uparrow$   
 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$d(x_i, y_i) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$$

Pogoj da je ta metrika definirana je da se omejimo na zaporedja, za katere je  $\sum x_i^2 < \infty$  "kvadratno sumabilna zaporedja"

standardne oznake  $l^2$

$l^2$  = metrični prostor s kvadratom sumabilnih zaporedij in z evklidsko metriko

$$f: X \rightarrow l^2$$

$$f(x) = (f_1(x), \frac{f_2(x)}{2}, \frac{f_3(x)}{3}, \dots)$$

$$\sum \dots \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \dots < \infty$$

$f$  je vložitev (je homeomorfizem na sliko)

injektivnost:  $\exists f(x) \neq f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

veznost:

Topologija na  $l^2$  je produktna

$f$  je zvezna  $\Leftrightarrow$  kompozicije na komponentah  $(f_1, f_2, \dots)$  torej je zvezna

veznost inverza

Izrek: (Urissonov metrizacijski izrek)

$X$  normalen, 2-steven  $\Rightarrow X$  je metrizabilen

Posledica:

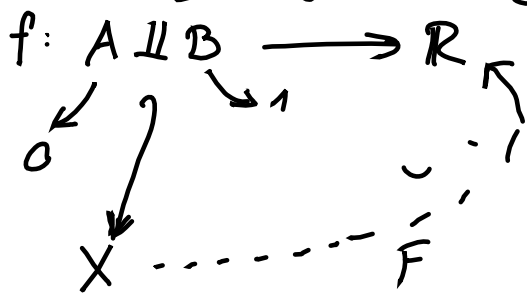
$X$  regularen, 2-steven  $\Rightarrow X$  je metrizabilen

Pravceprav (ker reg + 2-steven  $\Rightarrow$  norm.)

$X$  2-steven  $\Rightarrow (X \text{ regularen} \Leftrightarrow X \text{ metrizabilen})$

Nagata smirnov

$X^{\text{norm}} \supseteq A, B$  dis, ap.  
 $\nwarrow$  disjoint union



Dokazati: kako Tietzejev zadatak

Tietzejev izrek:

Naj bo  $A^{\text{zap}} \subseteq X^{\text{norm}}$

$$f: A \longrightarrow \mathcal{I}^{\text{interval}} \subseteq \mathbb{R}$$

$\exists F: X \rightarrow \mathcal{I}$  razširitev  $f$  na  $X$

$$F|_A = f \quad \text{kompozicija}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \mathcal{I} \\ \downarrow i & \nearrow F & \\ X & & \end{array}$$

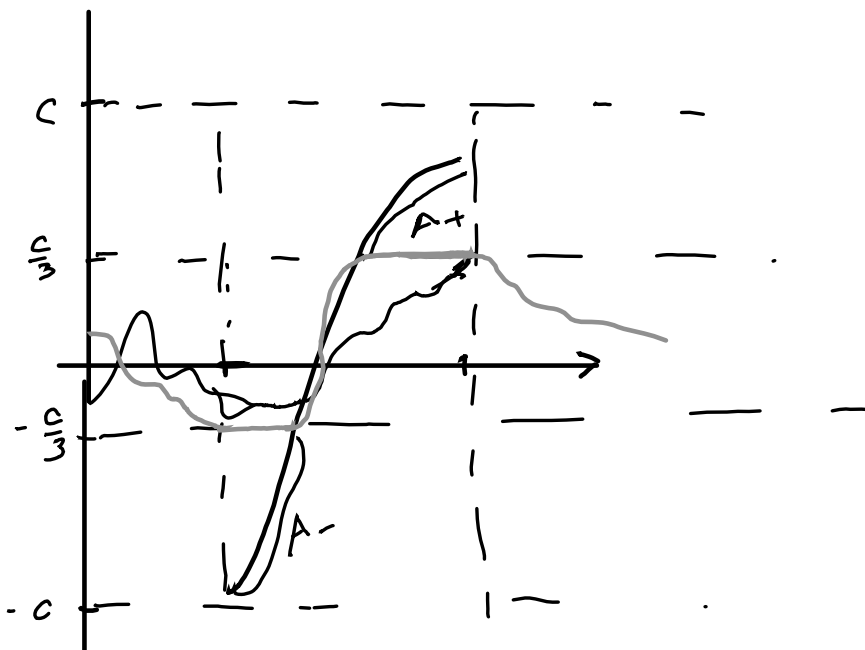
$$\begin{array}{c} \swarrow \text{razširitev} \\ F \circ i = f \end{array}$$

Lemma:

$$A^{\text{wp}} \subseteq X^{\text{norm}}, f: A \rightarrow [-c, c]$$

$$\exists h: X \rightarrow \left[-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right]$$

$$|h(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3}c \quad \forall x \in A$$



Dokaz:

$$A_+ := \{x \in A \mid f(x) \geq \frac{c}{3}\}$$

$$A_- := \{x \in A \mid f(x) \leq -\frac{c}{3}\}$$

obezpečí  
v X

h nej bo Urissonova funkce

$$h: (X, A_-, A_+) \rightarrow \left(-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right)$$

Dokaz Tietzeoveho lema

$$f^w: A^w \longrightarrow [-1, 1] \text{ B\AA s s}$$

$$\text{Po lem: } \exists h_1: X \longrightarrow \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$|f - h_1| \leq \frac{2}{3} \text{ na } A$$

$$f - h_1: A \longrightarrow \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

$$\text{po lem: } \exists c = \frac{2}{3}$$

$$\exists h_2: X \longrightarrow \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right]$$

$$|f - h_1 - h_2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Nedokazuje se  $h_1, h_2, \dots$

$$F = h_1 + h_2 + h_3 + \dots: X \longrightarrow [-1, 1]$$

konverguje na  $\forall X$

$$F|_A = f$$



$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{nosilec } f := [f \neq 0] = \overline{f^*(\mathbb{R} - \{0\})}$$

$\kappa$  zaprtje tega kjer je  $f \neq 0$

$\{U_1, \dots, U_n\}$  odprto pokritje za  $X$

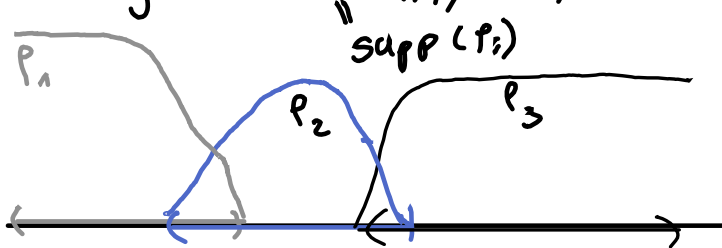
Razložitava enote podrejena pokritju  $\{U_1, \dots, U_n\}$

je nabor  $p_1, \dots, p_n: X \rightarrow [0, 1]$

$$p_1 + \dots + p_n = 1$$

$$(p_1(x) + \dots + p_n(x) = 1 \text{ za } \forall x)$$

in velja  $\text{nosilec}(p_i) \subset U_i$



Izrek:

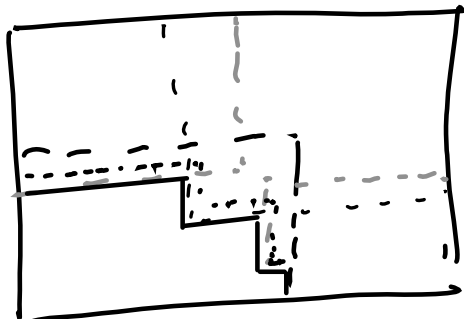
$X^{\text{norm}}$   $\{U_1, \dots, U_n\}$  adp. pokr. je

Obsteja razčlenitev ende podrejene  
tamu pokr. je

Dokaz:

1. korak

gledamo do  
pokr. je



$$\{U_1, \dots, U_n\} \bar{U}_i \subseteq U_i$$

$$A_1 = X - U_2 - \dots - U_n \subseteq U_1$$

$$\exists V_1^{\text{odp}}: A_1 \subseteq V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq U_1$$

$\{V_1, U_2, \dots, U_n\}$  je adp. pokr. je

ponovimo  
Dobimo  $\{V_1, \dots, V_n\}$

Vse to skupaj naredimo še enkrat

Dobimo  $\{W_1, \dots, W_n\}$  adp. pokr. je

$$W_i \subseteq \bar{W}_i \subseteq V_i \subseteq \bar{V}_i \subseteq U_i$$

$$P_i: X \rightarrow [0, 1]$$

$$P_{i,*}(\bar{W}_i) = 1 \quad P_i(X - V_i) = 0$$

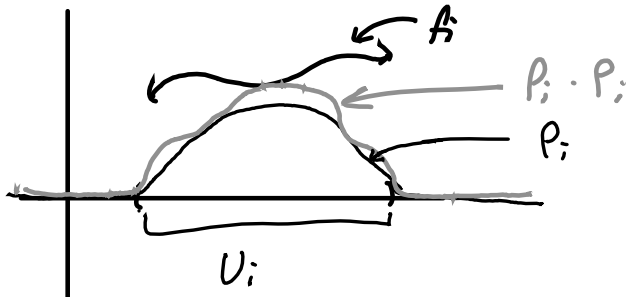
$P = P_1 + \dots + P_n$  je povsod  $> 0$

$\frac{P_1}{P}, \frac{P_2}{P}, \dots, \frac{P_n}{P}$  se seštevajo v 1

zvezne so  
nosilec  $\frac{P_i}{P} = \text{nosilec } P_i \subseteq U_i$

$$f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_i \cdot p_i(x) = \begin{cases} f_i(x) \cdot p_i(x) & \text{za } x \in U_i \\ 0 & \text{za } x \in X - \text{supp}(p_i) \end{cases}$$



$$f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

razčlenitev enote podregena  $\{U_i\}$

$$\leadsto f := f_1 \cdot p_1 + \dots + f_n \cdot p_n : X \rightarrow \mathbb{R}$$

Primer:  $X$  kompakten,  $T_2$  in

$\forall$  točka ima okolica, ki je izomorfa  $\mathbb{R}^n$   
( $n$ -razsežna mnogoterost)

Potem  $X$  lahko vložimo v nek evklidski  
prostor.

Obstaja pokritje  $U_1, \dots, U_n$

$$U_i \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}^n$$

Izberemo razclenitev  $p_1, \dots, p_n$

$$f := (\underbrace{p_1, \dots, p_m}_{\substack{\downarrow \\ \mathbb{R} \\ m \cdot 1}}, \underbrace{f_1 \cdot p_1, \dots, f_m \cdot p_m}_{\substack{\downarrow \\ \mathbb{R}^n \\ m \cdot n}}) : X \rightarrow \mathbb{R}^{m(n+1)}$$

$f$  je zvezna ker so vse koordinate zvezne  
 $f$  je injektivna  $f(x) = f(y), p_i(x) - p_i(y) > 0$

$f$  je vložitev ker slike iz kompakta v  $T_2$   
 $f_i(x) = p_i(y) \Rightarrow x = y$

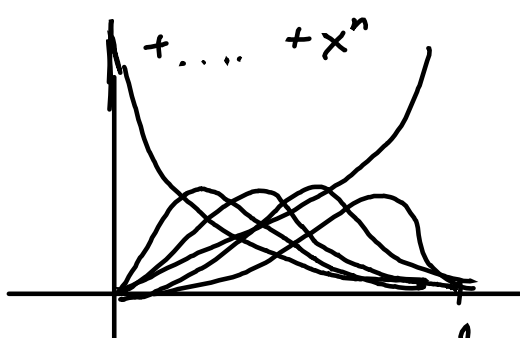
# Stone-Weierstrass izrek

Weierstrassov izrek: Polinom: so gosti v  $C[a,b]$   
 Tj vsako zvezno funkcijo lahko poljubno  
 enakomerno aproksimiramo s polinomom!

Bernsteinovi polinomi:

$$1 = ((1-x) + x)^n =$$

$$= (1-x)^n + \binom{n}{1}(1-x)^{n-1}x + \dots + \underbrace{\binom{n}{i}(1-x)^{n-i}x^i + \dots + x^n}_{B_{n,i}(x)}$$



$B_{n,i}(x)$

↳ Bernstein  
 $(n,i)$  polinom

de razdelitev enote, ki ni  
 podrejena drobemu poditju

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) := \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot B_{n,i}(x)$$

$f_n(x)$  konvergirajo k  $f(x)$

Dokaz:

$$f \text{ zvezna. } M := \max \{ |f(x)| \mid x \in [0,1] \}$$

$$f_n(x) - f(x) = \left( \sum f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot B_{n,i}(x) \right) - \left( f(x) \cdot \sum B_{n,i}(x) \right)$$

$$= \sum_i \left( f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x) \right) B_{n,i}(x)$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sum_i \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,i}(x) =$$

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

izbrano  $\varepsilon \rightarrow \delta$  (enake se ne zvečajo polinomov)

$$= \underbrace{\sum_{i: |x - \frac{i}{n}| < \delta} \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x) \right| \cdot B_{n,i}(x)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{i: |x - \frac{i}{n}| \geq \delta} \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,i}(x)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \leq 2M$$

$$\sum_{i: |x - \frac{i}{n}| \geq \delta} \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x) \right| \cdot B_{n,i}(x) \leq 2M \sum_{i: |x - \frac{i}{n}| \geq \delta} B_{n,i}(x)$$

Velja:  $\sum_{i=0}^n \left( \frac{x-i}{n} \right)^2 \cdot B_{n,i}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$

$$\leq 2M \sum_i \frac{\left( \frac{i}{n} - x \right)^2}{\delta^2} \cdot B_{n,i}(x) \leq \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n} \leq$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2 n} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ za dovolj velik } n$$

M. Stone:

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  je algebra

$$f_1, f_2, f_3, \dots$$

Najmanjša unitarna podalgebra  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ,  
ki vsebuje  $f_1, f_2, f_3, \dots$  je sestavljena iz

$$p(f_{i_1}, \dots, f_{i_n}) \quad p \text{ polinom } n \text{ spremenljivk}$$

$f_{i_k}$  so iz nabora

Izrek (Stone-Weierstrassov izrek)

Če je  $A \subseteq \mathcal{C}(X^{\text{normalen}})$  uniterne podalgebra, ki loči točke, potem je

$$\mathcal{C}(X) = \bar{A}$$

↳ v C-0 topologiji

$$\begin{aligned} &\rightarrow \forall x \neq x' \in X \\ &\exists f \in A. f(x) \neq f(x') \end{aligned}$$

Če je  $\forall A$  vsaj ena injektivna funkcija, potem  $A$  loči točke  
 $\sin x$  in  $\cos x$  ne ločita vseh točk, ampak na intervalu  $(0, \pi)$  skupaj jih

Dokaz

$k(t) = \sqrt{t}$  je enakomerna limita polinomov (na  $[0, 1]$ ) po Weierstrassovem izreku

- $f \in A, f \geq 0 \Rightarrow \sqrt{f} \in \bar{A}$  (A... algebra)
- $|f| = \sqrt{f^2} \in \bar{A}$  ( $f$  pozitivna) ( $A$  podalgebra  $\Rightarrow \bar{A}$  podalgebra)
- $f, g \in A \quad \max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$
- $\min(f, g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\exists \epsilon > 0. |\sqrt{t} - (a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k)| < \epsilon \\ &\mu \max f \text{ na kompaktni} \\ &\dots \dots ?? \end{aligned} \right.$$

$$\max \{f_1, \dots, f_n\} \in \bar{A}$$

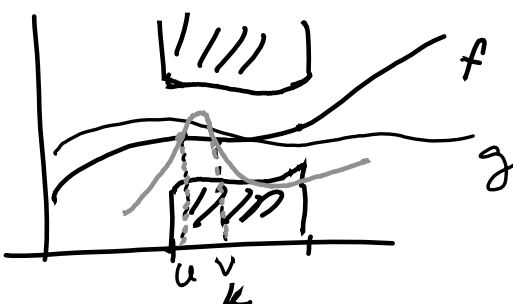
$$\min \{f_1, \dots, f_n\} \in \bar{A}$$

$$x \neq x'. \exists g: X \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) \neq g(x')$$

$$\Rightarrow \forall a, b \exists h \in A. h(x) = a \quad h(x') = b$$

$$h(t) := a + \frac{b-a}{g(x')-g(x)} (h(t) - h(x))$$

$f \in \mathcal{C}(X), \langle f, K, \epsilon \rangle$  ... bazična okolica  
 Iscemo  $g \in A \cap \langle f, K, \epsilon \rangle$



$\forall u, v \in K$  izberemo

$$h_{u,v}: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h_{u,v}(u) = f(u) \quad h_{u,v}(v) = f(v)$$

Pri fiksnem  $u$  definiramo

$$U_v := \{x \in K \mid h_{u,v}(x) < f(x) + \epsilon\}$$

je okolica  $v$

$\{U_v\}$  je odprto pokritje  $K$   $U_1, \dots, U_n$

$$h_u := \min \{h_{u,v_1}, \dots, h_{u,v_n}\}$$

Pobimo funkcijo ki ne gre višje od  $f(x) + \epsilon$

$$\forall u \text{ definiramo } V_u := \{x \in K. h_u(x) > f(x) - \epsilon\}$$

$\{V_u \mid u \in K\}$  so odprto pokritje  $K$

$V_{u_1}, \dots, V_{u_n}$  je končno podpokritje

$$h := \max \{h_{u_1}, \dots, h_{u_n}\} \in \bar{A}$$

Torej bo  $h$  znotraj okolice