

Kvocienčni prostori

Definicije

- kvocienčna projekcija $q: X \mapsto [X]$
- $\mathcal{T}_\sim$ je najmočnejša topologija, da je q zvezna

$$\mathcal{T}_\sim = \{V \subseteq X_\sim; q^*(V) \in \mathcal{T}\}$$

- Opomba: kvocienčna projekcija ni nujno odprta ali zaprta
- nasičenje $A: q^*(q_*(A))$ - unija vseh ekv. razredov, ki sekajo A
- f surjektivna $\wedge (\forall V \subseteq Y \stackrel{\text{odp}}{\subseteq} Y \iff f^*(V) \stackrel{\text{odp}}{\subseteq} X) \Rightarrow f$ je kvocienčna
- lastnost je deljiva če se iz poljubnega topološkega prostora prenese na njegov kvocienčni prostor (lastnost se ohranja pri kvocienčni presliki)

Trditve

- $g_*(A)$ odprta $\Leftrightarrow g^*(g_*(A))$ odprta
- $g_*(A)$ zaprta $\Leftrightarrow g^*(g_*(A))$ zaprta
- g odprta $\Leftrightarrow$ nasičenje vsake množice je odprto
- g zaprta $\Leftrightarrow$ nasičenje vsake množice je zaprto
- $(x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)) \Rightarrow f$ dobro inducirano preslikavo $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$
- f zvezna $\Rightarrow \bar{f}$ zvezna
- f surjektivna $\Rightarrow \bar{f}$ surjektivna
- f sur $\Rightarrow (f$ kvocientna $\Leftrightarrow (Z^{\text{zap}} \subseteq Y \Leftrightarrow f^*(Z)^{\text{zap}} \subseteq X))$
- f kvocientna in ločitev. razrede $\Rightarrow \bar{f}$ homeo.
- f zvezna in sur. f odp $\vee f$ zap $\Rightarrow f$ kvocientna
- X kompaktna, Y Hausdorffov $\Rightarrow f: X \rightarrow Y$ je zaprta
- f, g kvocientni $\Rightarrow g \circ f$ kvocientna
- $g \circ f$ kvocientna $\wedge f, g$ zvezni $\Rightarrow g$ kvocientna
- h homeomorfizem, $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow h(x_1) \sim h(x_2)$
 $\Rightarrow X/\sim \cong Y/\sim$
- X metričen kompaktna $\Rightarrow \exists f: C \rightarrow X$, f kvocientna
- $\mathcal{R}$ razčlenitev prostora X .
 $X/\mathcal{R} \in T_1 \Leftrightarrow$ članice $\mathcal{R}$ so zaprte v X

Vložitve

Möbiusov trak v poln torus $S^1 \times B^2$

$$f: [0,1]^2 \longrightarrow S^1 \times B^2$$

$$(x,y) \longmapsto (e^{2\pi i x}, e^{\pi i x} (2y-1))$$

je kvocientna

Poln torus v $\mathbb{R}^3$

$$\gamma: S^1 \times B^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$((x,y), (z,w)) \longmapsto w(0,0,1) + (z+2)(x,y,0)$$

Deljive lastnosti

- kompaktnost
- povezanost (s potmi)
- diskretnost
- trivialnost
- separabilnost
- lokalna povezanost

Nedeljive lastnosti

- T_0, T_1, T_2, T_3, T_4
- lokalna kompaktnost
- 1-števnost
- 2-števnost
- metriizabilnost
- popolna nepovezanost

Topološke grupe in delovanja

Definicije

- G je topološka grupa, če je množenje in invertiranje zvezno

- p -adna števila: p -adna metrika:

$$|\frac{m}{n}| = p^{-k} \text{ če } \frac{m}{n} = p^k \frac{a}{b}; a, b \text{ tuji s } p$$

- Lijeve grupe - topološke grupe, ki so hkrati gladke mnogoterosti in operacije so gladke preslikave

- Levo delovanje grupe G na X je zvezna preslikava $\varphi: G \times X \longrightarrow X$ za katero velja

- $e \cdot x = x \quad \forall x \in X$

- $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x \quad \forall a, b \in G, \forall x \in X$

Trditve

- Leta transformacija $L_a: G \longrightarrow G$ $g \mapsto ag$ je homeomorfizem
- $\forall a, b \in G. \exists h$ homeo. $h: G \longrightarrow G$. $h(a) = b$
- f delovanje je $f_a(x) = f(a, x)$ je homeomorfizem X
- Delovanje grupe G na X določa ekv. relacijo na X
 $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, y = g \cdot x$
 $G \cdot x = \{g \cdot x; g \in G\}$ so ekv. razredi
- $G \curvearrowright X$. π kvocienčna projekcija: $X \rightarrow X/G$ je odprta
- $CS^n \cong B^{n+1}$, $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$

Konstrukcije kvacientov, projekturni prostori

Definicije

- stožec nad X : $CX := X \times [0, 1] / X \times \{1\}$
- suspenzija nad X : $\Sigma X := X \times [-1, 1] / X \times \{-1\}, X \times \{1\}$
- simetrični produkt: $S^n X := X^n / S_n$
- limitni prostorov $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots$
 $\lim (X_n, f_n) := \coprod_{n=1}^{\infty} X_n / \sim$
kjer je $x \in X_i, y \in X_j$.
 $x \sim y \iff \exists n \in \mathbb{N} : f_n(\dots (f_i(x)) = f_n(\dots (f_j(y)))$
- zlepek: $X \cup_f Y := X \amalg Y / a \sim f(a) \forall a \in A \quad f: A \rightarrow Y$
- projekturni prostor $\dim n$ nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$
 $\mathbb{F}P^n := (\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}) / (x = \lambda x, \lambda \in \mathbb{F}^*) = (\mathbb{F}^{n+1} - \{0\}) / \mathbb{F}^*$

Trditve

- X, Y normalna A ap, f vezna $\Rightarrow X \cup_f Y$ normalen
- $A \stackrel{2ap}{\subseteq} X$, f apna vložitev $\Rightarrow$
 - X, Y 2-stevna $\Rightarrow X \cup_f Y$ 2-stevna
 - $X, Y \in T_2 \Rightarrow X \cup_f Y \in T_2$
- $\forall u, v \in \mathbb{F}P^n. \exists h \text{ homeo: } \mathbb{F}P^n \rightarrow \mathbb{F}. h(u) = v$
- $S(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}, S(\mathbb{C}^n) = S^{2n-1}, S(\mathbb{H}^n) = S^{4n-1}$
- $2: \mathbb{F}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{F}P^n$ kvacientna proj. je odprta
- $\mathbb{F}P^n \cong S(\mathbb{F}^n)/S(\mathbb{F})$
- $\mathbb{F}P^n$ kompakten, lok. komp., povezan s potmi,
lokalno povezan s potmi in 2-staven
- $\mathbb{R}P^n \cong S^n/S^0 \cong S^n/\{1, -1\} = S^n_{x \sim -x}$

...

