

Uvod

Cilj topologije: Razumeti prostore in preslikave med njimi

preslikava zvezna funkcija

prostori: osnovni interes so metrični prostori

Različne konstrukcije daje prostore, ki niso nujno metrični; ali pa ni takej jasno da so metrični.

Zato si pomagamo s topološkim lastnostmi.

Konstrukcije prostorov:

- podprostor

- vsota oz disjunktna unija

- produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} ; x_\lambda \in X_\lambda \}$

$$B = \{ U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \}$$

Pride iz tega da so projekcije zvezne

$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ opremlimo s najšibkejšo topologijo, da so projekcije zvezne

$$p_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\mu \quad \mu \in \Lambda$$

podbazo sestavljajo $p_\mu^*(U_\mu)$ od k

$$U_\mu \times \prod_{\lambda \neq \mu} X_\lambda$$

Bazne množice so $U_{\mu_1} \times U_{\mu_2} \times \dots \times U_{\mu_k} \times \prod_{\lambda \neq \mu_1, \dots, \mu_k} X_\lambda$

- kompakтификаcija z 1 točko

- slike prostora pri zvezni presliki:

- Slike prostora pri zvezni presliki
 $f: X \rightarrow Y$ $f(X)$ dobi topologijo iz Y

$$f^*(\{y\}) \subseteq X$$

$\{f^*(\{y\}); y \in Y\}$ razdelitev množice X

To torej deloča ekvivalenčna relacija in vsaka ekvivalenčna relacija deloča tako razdelitev

1. Kvocientni prostori:

1.1 kvocientna topologija

Det: X množica in $\sim$ ekvivalenčna
relacija na X . Za poljuben $x \in X$
označimo $[x] = \{y \in X; x \sim y\}$
ekvivalenčni razred, ki pripada x

Kvocientna množica množica X po $\sim$
je množica vseh ekvivalenčnih razredov

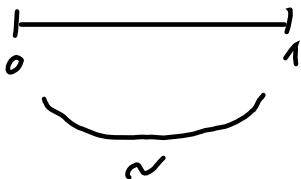
$$X/\sim := \{[x]; x \in X\}$$

Kvocientna projekcija $\pi: X \longrightarrow X/\sim$
 $\pi: x \longmapsto [x]$

Primer: $X = [0, 1]$

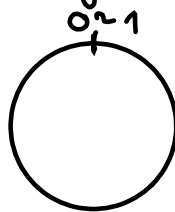
$\sim$ ekvivalenčna relacija določena z
 $0 \sim 1 \quad (1 \sim 0; x \sim x \quad \forall x \in X)$

keko si lahko predstavljamo $X/\sim$



Naraven model $X/\sim$ je $[0, 1]$

Druge možnost je



Opomba: 1) pri opisu ekvivalenčne relacije bomo običajno navedli le netrivialne relacije, ki generirajo ekvivalenčno relacijo ob upoštevanju lastnosti ekv. relacije.

2) ekvivalenčne relacije $\sim$ določa razdelitev X na ekvivalenčne razrede. To razdelitev označimo z $\mathcal{R} = \{[x] \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ kvocientno množico lahko označimo $X/\sim = X/\mathcal{R}$

3) če $\sim$ določa le en netrivialen ekvivalenčni razred $A \subseteq X$; A ni enojec potem kvocientno množico označimo z X/A

če je X topološki prostor in
 želimo $X/\sim$ opremiti s topologijo tako
 da bo ta odražala lastnosti prostora X .
 Posebej želimo da je $g: X \rightarrow X/\sim$
 zvezna

Ta pogoj topologije na $X/\sim$ ne določa
 enolično

če neka topologija na $X/\sim$ temu
 ustreza, potem ustreza tudi vsaka
 šibkejša. Zato je smiselno $X/\sim$ opremiti
 z najmanjšo topologijo pri kateri je
 g zvezna.

Torej za odprte v $X/\sim$ vzamemo vse,
 ki imajo odprte preslike v X

Def: X topološki prostor, $\sim$ ekv. relacija.

$\mathcal{T}$ topologija na X . Potem jo
kvocienatna topologija na $X/\sim$

$$\mathcal{T}_\sim = \{ V \subseteq X/\sim ; g^*(V) \in \mathcal{T} \}$$

Opomba: v kvocienatni topologiji velja
 torej $V \text{ odprto v } X/\sim \Leftrightarrow g^*(V) \text{ odprto v } X$

$\Rightarrow$ zveznost

$\Leftarrow$ največjost $\mathcal{T}_\sim$

z zaprto $\Leftrightarrow g^*(z)$ zaprto

Ali je torej g odprta iz zaprt?

Ne nujno:

Primer:

$$1) X = [0, 1] \quad \mathcal{R} = \{ [0, 1), \{1\} \}$$

$$X/\sim = \{ [0], [1] \}$$

$$\mathcal{T}_\sim = \{ \emptyset, X_\sim, [0] \}$$

$$g^*([0]) = [0, 1) \quad \begin{array}{l} \text{odprt} \vee X \\ n: \text{odprt} \vee X \end{array}$$

$$\{[0]\} \text{ n: zaprt, je odprt}$$

$$g^*([1]) = \{1\} \text{ zaprt, n: odprt}$$

Ali je g zaprt? Ne

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{odprt}}}{g_*}(\{0\}) = [0] \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n: zaprt}}}{\quad}$$

2) $X = [0, 2]$ $[1, 2]$ edini pravi dv. razred

$$X/[1, 2] \simeq [0, 1]$$

$$g: X \longrightarrow X/[1, 2] \quad \text{ni odg. ta}$$

$$g^*(1, 2) = [1]$$

$$g^*([1]) = [1, 2] \quad \text{ni odprt v } X$$

3) $X = [0, 1]$ $A = X \cap \mathbb{Q}$ $B = X - \mathbb{Q}$

$$X/\{A, B\} = \left\{ [0], \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \right\}$$

$$\tau = \{\emptyset, X_{\{A, B\}}\}$$

Def: X mrežica, $\sim$ ekv. relacija

za $A \subseteq X$ je njeno nasicenje enoto

$g^*(g_*(A)) \dots$ unija vseh ekvivalenčnih razredov, ki sekojo A

Trditev: za $A \subseteq X$ velja da je

$g_*(A)$ odprta $\Leftrightarrow$ nasicenje $g^*(g_*(A))$
odprta

Podobno za zaprta.

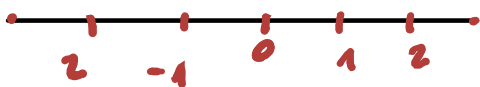
g je odprta, če je nasicenje vsake mrežice odprta in zaprta če je nasicenje vsake mrežice zaprta

Cilj:

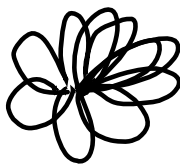
X topološki prostor $\sim$ ekv. relacije
če je to mogoče želimo poiskati
nek geometrični model za Y =
kvocient $X/\sim$ in pokazati da je
 $X/\sim \cong Y$

Primer:

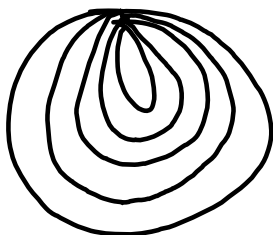
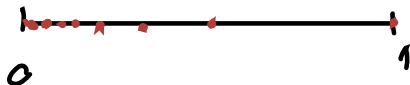
$$X = \mathbb{R} \quad A = \mathbb{Z}$$



$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = ?$$



$$2) \quad X = [0, 1] \quad A = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$



v 2) je X kompakten. Po definiciji je g
zveza, zato je $X/\sim$ tudi kompakten
v 1) X_n kompakten zato ne vemo ali je
kvocient kompakten

1) ni mogoče vložiti v euclidski prostor

1.2 kvocienčne preslikave

Cilj: razumeti preslikave iz kvocienkov

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f=g \circ \pi} & Y \\ \pi \downarrow & & \uparrow g \\ & X/\sim & \end{array}$$

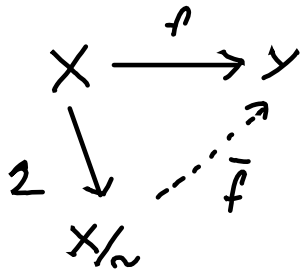


$$\text{če je } x \sim y \text{ v } X \Rightarrow \begin{array}{c} g(x) = g(y) \\ \parallel \quad \parallel \\ [x] = [y] \end{array}$$

$$\text{in zato je } \begin{array}{ccc} g(\pi(x)) = g(\pi(y)) \\ \parallel \quad \parallel \\ f(x) \quad f(y) \end{array}$$

Torej je f konstantna na ekvivalenčnih razredih. t.j., ekvivalentne točke slike v iste

Želimo obratno: za preslikavo $f: X \rightarrow Y$
iskati pogoj, da določa preslikavo $X/\sim \rightarrow Y$



da diagram komutira

Če naj diagram komutira mora biti $\bar{f}$
konstantna na ekvivalenčnih razredih

$$\forall x, y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

$$\bar{f}([x]) := f(x)$$

$\bar{f}$... preslikava inducirana s f

Trditvi:

Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekv. relacija

$f: X \rightarrow Y$ zvezna preslikava, ki je konstantna na ekv. razredih. Potem f dobro definira preslikavo $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ za katero velja

$$\bar{f} \circ q = f. \text{ Poleg tega velja}$$

1) f je zvezna $\Rightarrow \bar{f}$ zvezna

2) če je f surjektivna $\Rightarrow \bar{f}$ surjektivna

3) če $\forall x \neq y. f(x) \neq f(y) \Rightarrow \bar{f}$ injektivna

(tj. f loči ekvivalenčne razrede)

Dokaz: (2) in (3) jasno

1) Naj bo f zvezna. Dokazujemo zveznost $\bar{f}$
Izberemo poljuden $V \in \mathcal{T}_Y$

Ali je $\bar{f}^*(V)$ odpr v $X/\sim$

$$f^*(V) \text{ odpr} \Leftrightarrow \underbrace{g^*(\bar{f}^*(V))}_{(f \circ g)^*(V)} \text{ odpr v } X$$
$$(f \circ g)^*(V) = f^*(V)$$

Ker je V odpr v Y in $f: X \rightarrow Y$ zvezna

je $f^*(V)$ odpr v X

Zanima nas kdaj bo $\bar{f}$ homeomorfizem

(zvezna, bijektivna, zvezna inverz)

(bijektivne f , bijektivne f_*)

$\bar{f}$ je homeomorfizem $\Leftrightarrow \bar{f}$ bijektivna in
poradi bijektivna med topologijama

$\Leftrightarrow \bar{f}$ je bijektivna in $\forall V \subseteq Y, (V \text{ odpr}) \Leftrightarrow \bar{f}^*(V) \text{ odpr}$



$$(V \text{ odpr} \subseteq Y \Leftrightarrow \underbrace{f_*^{-1}(\bar{f}^*(V))}_{f^*(V)} \text{ odpr})$$

↑
karakterizacija = kvocientnost

Naj bosta X in Y topološki prostora

$$f: X \rightarrow Y$$

f surjektivna in $\forall V \subseteq Y. (V \text{ odpr} \iff f^*(V) \text{ odpr})$

$\Rightarrow f$ imenujemo kvocientna preslikava

Opombe:

1) Po definiciji: kvocientna topologija je kvocientna projekcija kvocientne preslikave

Obratno: Vseko kvocientno preslikavo

$f: X \rightarrow Y$ lahko obravnavamo kot

kvocientno projekcijo pri ekvivalenčni relaciji, določeni z razbitjem X na prastike točke

2) Kvocientna preslikava je vedno zvezna ($\Rightarrow$) in ~~ni~~ ⁿⁱ nujno odprto niti zapeto (ker že vemo za kvoc. proj.)

3) Implikacija ($\Leftarrow$) v definiciji kvocientne preslikave je posebna lastnost, tej včasih rečemo kvocient v ožjem smislu. Za zveznost je za upevno enoličnost ~~potrebno~~ ^{potrebno} preveriti le prastoj

4) Surjektivna f je kvocientna $\iff$
($\forall z \subseteq Y. z \text{ odpr} \iff f^*(z) \text{ odpr}$)

Lema: Naj bo $f: X \rightarrow Y$ zveza in surjektivna
če je f odprta ali zaprta je kvocientna

Dokaz:

Preveriti je treba kvocientnost v obeh
smislu

$\supset_n \subset$

Recimo da je f zaprta

Izberimo poljubno $Z \subseteq Y$ za katero je
 $f^*(Z)$ zaprta v X

$$Z \supseteq f^*(Z)$$

.....
 $f^*(Z)$ zaprta v X in f zaprta

Torej $f_*(f^*(Z)) \stackrel{\uparrow}{=} Z$ zaprta
surjektivnost

Izrek: (o prepoznavi kvocienta)

X, Y : top. prostor nekva relacija na X

Naj bo $f: X \rightarrow Y$ kvocienčna preslika,

ki naredi vsake identifikacije kot $\sim$

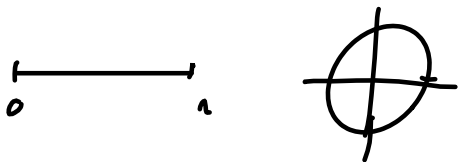
(tj. f je konstantna na ekv. razredih in jih loči)

Potem je inducirana preslika $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$
homeomorfizem

Primer: $X = [0, 1]$ $0 \sim 1$

Dokažimo: $X/\sim \cong S^1$

Iščemo f kvocientno, ki naredi isle identifikacije kot $\sim$



$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

f je surjektivna in slike v krogu: $\circ$

Preveriti moramo kvocientnost

imamo zveznost

kvocientnost v ožjem smislu?

Davaj je odprto ali zaprto

- f je zvezna, ker je elementarna
- f je kvocientna v ožjem smislu, ker je zaprta, saj slike iz kompaktnega v hausdorff
- f je hom. na dv. razredih

$$f(0) = (1, 0)$$

$$f(1) = (1, 0)$$

$$0 \sim 1 \Rightarrow f(0) = f(1)$$

f bo ekvivalenčne razrede:

interval $[0, 1]$ se izje slike na

krožnico, zato imo f različne vrednosti na različnih dv. razredih

izrek $\bar{f}: X/\sim \rightarrow S^1$ je homeomorfizem

✓ 4.3

zčetek prebranj

$$X \cong Y$$

Trditev $X/\sim_x \cong Y/\sim_y$ ($\sim_y$ in $\sim_x$ sta
 vsklajeni: $(y_1 \sim y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) \sim f^{-1}(y_2))$)

Dleel

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow q_x & & \downarrow q_y \\ X/\sim_x & \xrightarrow{F} & Y/\sim_y \end{array}$$

homeomorfizem je
 kvocientna preslika
 q_x
 q_y
 F
 $q_y \circ f$ kvocientna

Po definiciji: f sliko ohr. razred v X v

o.h. razred v Y

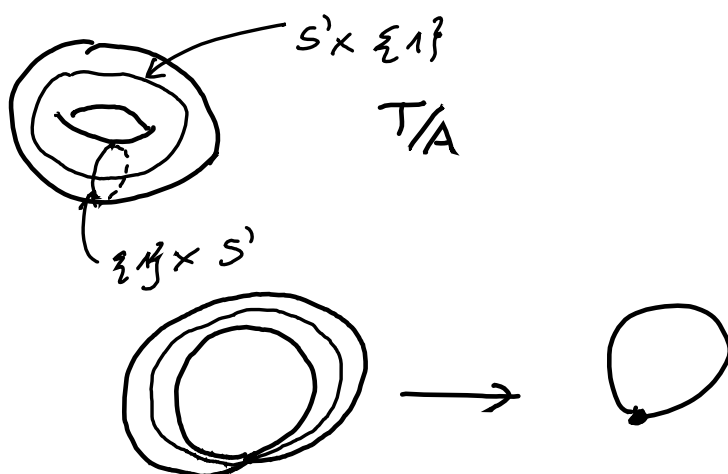
Toj $q_y \circ f$ naredi iste identifikacije
 kot q_x

$\Rightarrow q_y \circ f$ inducira homeomorfizem $F: X/\sim_x \rightarrow Y/\sim_y$

Primer:

Naj bo $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1 \subseteq S^1 \times S^1 = T \text{ torus}$$



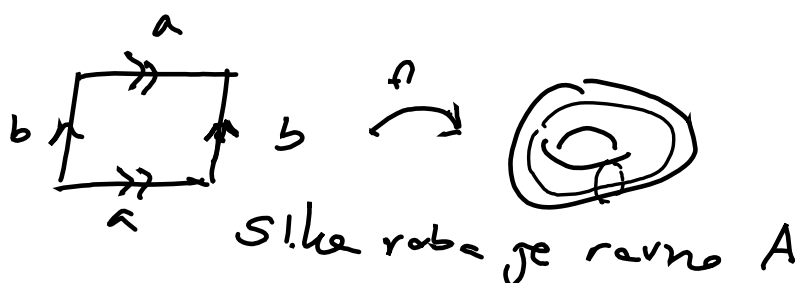
Najbrž je kvocient S^2

Ideja: torus prerežemo vzdolž A , da
dobimo kvadrat z identifikacijami
na robu

$$X = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$f: X \rightarrow S_1 \times S_1$$

$$f(x, y) = (\underbrace{\cos 2\pi x, \sin 2\pi x}_{e^{i2\pi x}}, \underbrace{\cos 2\pi y, \sin 2\pi y}_{e^{i2\pi y}})$$



$$B := f^{-1}(A) = \partial I^2 \dots \text{rob kvadrata}$$

če nadaljujemo tako da A stisnemo v točko
to ustrezno identifikacijam na kvadratu, ki
celotni rob stisnejo v točko

$$I^2 \xrightarrow{p} I^2/B \text{ kvocientna projekcija}$$

$$\text{vemo da } \boxed{I^2} \cong \mathbb{D}^2$$

$$\partial \rightarrow \partial I^2$$

$$\partial^1 = \partial \mathbb{D}^2$$

$$\downarrow p$$

$$\downarrow \pi$$

$$I^2/B \cong \mathbb{D}^2/S^1 \cong S^2$$

$$\Rightarrow S^2 \cong T/A$$

Deljivost topoloških lastnosti

Def: topološke lastnosti $\mathcal{L}$ je deljiva,
če za $\forall X \in \mathcal{L} \sim \forall n$ ekv. rel. $X/\sim \in \mathcal{L}$

Ekvivalentno: $\mathcal{L}$ je deljiva, če se ohranja
pri kvocienčnih preslikavah

Trditve:

1) Deljive so naslednje lastnosti

- kompaktnost, povezanost (s potmi), lokalna povezanost (s potmi), separabilnost, diskretnost, trivialnost

2) Nedeljive so:

- lokalna kompaktnost, 1- in 2-števnaost, separabilne lastnosti, metričnost, popolna nepovezanost

Dokaz:

komp., pov. in sep. se ohranja z veznosjo

lokalna povezanost s potmi

lok. povezan $\Leftrightarrow$ komponente vsake odprte množice so odprte

$$X, \sim \quad V \text{ odprta} \subseteq X / \sim$$

$$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_{\lambda} \quad V_{\lambda} \text{ so komponente za povezanost}$$

V_{λ} so odprte

$$g: X \rightarrow X_{\lambda} \quad \text{v o.c.} \quad \text{celo}$$

$$g^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} g^{-1}(U_{\lambda}) \text{ je odprta v } X$$

$\Rightarrow$ predstavi se X loka. p.o. $\Rightarrow$ celotno

$\Rightarrow$ komponente $g^{-1}(U)$ odprte v X

Naj bo w poljubna komponenta $g^{-1}(U)$

Ker je V povezana in $\sim$ vezan $\Rightarrow$

$$g(w) \subseteq V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_{\lambda}$$

$$\exists \lambda \in \Lambda, \quad g(w) \subseteq V_{\lambda} \text{ za nek } \lambda \in \Lambda$$

$$\Rightarrow w \subseteq g^{-1}(V_{\lambda})$$

$\Rightarrow g^{-1}(V_{\lambda})$ je unijna komponenta

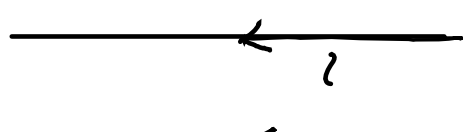
za povezanost $\Rightarrow g^{-1}(V_{\lambda})$ je

odprta $\Leftrightarrow V_{\lambda}$ so odprte

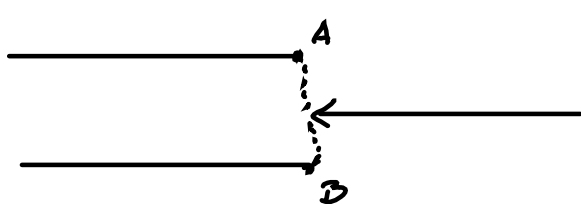


2) separabilne lastnosti:

$$T_2: X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$$



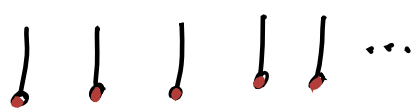
Relacija $\sim (x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$



A in B nimata več disjunktnih delov

1-števnaost

$$X = [0, 1] \times \mathbb{N} \quad A = \{0\} \times \mathbb{N}$$



$$X/A = \text{konvergenca} \quad X/A \text{ ni enačben$$

Dokaz s protislovjem:

Rečimo da jo ima

$$a = g(A) = g(0, n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Rečimo da jo

$\forall \epsilon > 0$ najdemo $n \in \mathbb{N}$



τ -ditev: X top.-pr. $\sim$ ekv. relacija na X

$X/\sim \in T_1 \Leftrightarrow$ ekvivalenčni razredi v X
so zaprti

Dokaz:

$X/\sim \in T_1 \Leftrightarrow$ točke v $X/\sim$ so zapte

$$\Leftrightarrow g^{-1}(t_2) \underset{\text{cp}}{\subseteq} X$$

1.3 Topolaške grupe in delovanje

Def: Topolaška grupa je grupa G , ki je opremljena s topologijo, glede na katero sta množenje

$$m: G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, h) \longmapsto gh$$

in invertiranje

$$\text{inv}: G \longrightarrow G$$
$$g \longmapsto g^{-1}$$

zem:

Opomba: Poznamo že primer topolaške algebre

$$(C(X), \tau_{co})$$

Ki bomo večinoma delali mod $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

ki so topološki obsegi, obstajajo še drugi, npr. končni obsegi $(\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p)$ ki jih običajna oprenimo z diskretno topologijo p -adičnih, ki so nepolniter $\mathbb{Q}$ v p -adični metriki

$$\frac{m}{n} = p^k \frac{m_1}{n_1} \quad m_1, n_1 \text{ tuja } p \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\| \frac{m}{n} \right\|_p = p^{-k}$$

Primeri

1) G poljubna grupa opremljena z diskretno topologijo je tudi grupa

2) G top. grupa $H \leq G \Rightarrow$
 H z inducirano topologijo je tudi top. grupa

3) $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{H}, +)$ so top. grupe

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ so tudi top. grupe

norma je **multiplikativna** ko:

$$\mu, \lambda \in \mathbb{F} \quad \|\mu\lambda\| = \|\mu\| \cdot \|\lambda\|$$

Posebej sledi, da so enotske sfere
zaprte za množenje

$(S^0, \cdot)$ $(S^1, \cdot)$ $(S^3, \cdot)$ so topološke
grupe
 $\{\pm 1\}$

kaj pa S^2 ? Ne!

Neglejši dokaz z uporabo algebr in
topologije

5) Naj bodo $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ grupe

Potem je $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ opremljena z operacijami:

po komponentah in produktna topologija
tudi topološka grupa

Npr: $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \dots$ Cantorjeva množica

6) Topološke grupe linearnih izomorfizmov

$F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

$GL_n(F) = \{ \text{lin. izomorf. } F^n \rightarrow F^n \}$

$$= \{ A \in F^{n \times n} \mid \det A \neq 0 \}$$

.... splošne linearne grupe

$$(A, B) \mapsto A \cdot B \quad \text{zveza}$$

$$A \mapsto A^{-1} \quad \text{kudi zveza}$$
$$= \frac{1}{\det A} \tilde{A}$$

Še več: To je **Liejeva grupa** ... gladka
množenost in operaciji sta gladki

Enako velja za vse standardne podgrupe:

$SL_n(F) \dots \det = 1$

nad $\mathbb{R}$:

$O_n \dots$ ortogonalne $AA^T = I$

$SO_n \dots$ specialne ortogonalne $A^{-1} = A^T$

nad $\mathbb{C}$:

$U_n \dots$ unitarne $AA^H = I$

$SU_n \dots$ specialne unitarne

nad $\mathbb{H}$

$Sp_n \dots$ symplektična grupa $AA^H = 1$

(sledi: $\det = 1$)

Trditev: Naj bo G top. grupa
 $a \in G$.

leva (oz desna) translacija za a je

$$L_a: G \rightarrow G$$

$$g \mapsto ag$$

$$R_a: G \rightarrow G$$

$$g \mapsto ga$$

sta homeomorfizma

Dkaj:

$$R_a: G \xrightarrow{\cong} G \times \{a\} \subset G \times G \xrightarrow{m} G$$

$$g \mapsto (g, a) = (g, a) \mapsto ga$$

kompozitum veznih je zvena ~~zven~~

inverz: R_a^{-1}

$$R_a^{-1}(R_a(g)) = R_a^{-1}(ga) = (ga)a^{-1} = g(a a^{-1}) = g$$

Posledica

Top. grupa G je homogen prostor, tj. za

poljubni $x, y \in G$. $\exists$ homeom. $h: G \rightarrow G$; $h(x) = y$

Dokaz: $L_{yx^{-1}}$ ali $R_{x^{-1}y}$

Def:

Maj bo X top. prost. in G top. grupa

(levo) **delovanje** grupe G na prostor X

je zveza preslikave $\rho: G \times X \rightarrow X$

$$(g, x) \mapsto \rho(g, x) = g \cdot x$$

za katero velja:

$$1) e \cdot x = x \quad \forall x \in X$$

$$b \cdot (a \cdot x) = (ba) \cdot x \quad \forall x \in X, \forall a, b \in G$$

V tem primeru rečemo da je X G -prostor

Opomba: kot v primeru grupe, delovanje določa translacijo ki je homeomorfizem prostora X

$$L_a: X \rightarrow X$$

$$x \mapsto a \cdot x$$

Ampak v splošnem X ni homogen za delovanje grupe G :

za polj $x \in X$ je

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \text{ orbita točke } x \text{ in}$$

ta v splošnem ni ves X

Tone; delovanje G na X določa dv. razliko
na X za katera so ekvivalentni;
ravni orbite delovanja;

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists g \in G, g \cdot x = y$$

$$[x] = \{ y \mid y = g \cdot x \mid g \in G \} = G \cdot x$$

Za poljuben $x \in X$ je $G_x = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$
stabilizatorska podgrupa elementa x

Velja: $G \cdot x \xrightarrow{\text{bij}} G/G_x$

Trditev:

Naj, top. grupa G deluje na top. prostor X .
Potem je kvocienarna projekcija $q: X \rightarrow X/G$
v prostor orbit odprta

Dokaz:

Preveriti moramo da je nesicenoje +
odprete n.n. v X odprti v X :

$$U^{\text{odp}} \subseteq X$$

$$\begin{aligned} q^{-1}(q(U)) &= \bigcup_{x \in U} G \cdot x = \{ g \cdot x \mid g \in G, x \in U \} \\ &= \bigcup_{g \in G} \{ g \cdot x \mid x \in U \} = \bigcup_{g \in G} L_g(U) \end{aligned}$$

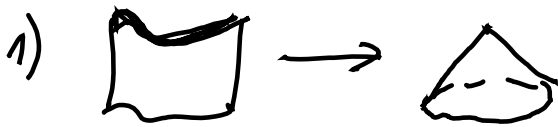
Ker je U^{odp} in L_g homeo. slike odp. v odp.
za to je $L_g(U)$ odprta, ~~ker~~ zato tudi
unija het odprta 

1.4 Konstrukcije kvocienata

1) $X \rightarrow \mathbb{R} \cdot 1'$

stažen nad X : $CX := X \times I / \sim$
 $\sim$ je relacija ekvivalencije

2) suspenzija X : $\Sigma X := X \times [-1, 1] / \sim$
 $\sim$ je relacija ekvivalencije



Trditve:

$$CS^n = B^{n+1}$$

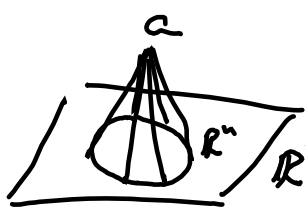
$$ZS^n = S^{n+1}$$

opomba:

$$za \ x \in \mathbb{R}^n$$

$$1) \quad " \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

za poljubnem $a \notin \mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}$



Definiramo linearni stožec nad X kot unijo vseh deljic

$$\{[a, x] \mid x \in X\}$$

Vse te deljice se paroma sekaajo v točki a

$L_a X \dots$ linearni stožec

$L_a X$ je kot mrežica enake CX .

topologija ima enake če je X kompaktna.

2) Simetrični produkt

X top. prostor $n \in \mathbb{N}$

$$X^n = X \times \dots \times X$$

simetrična grupa S_n deluje na X^n s

permutacijami: faktoriziraj in kvocient pri tem deluje je simetrični produkt

$$S^n X := X^n / S_n$$

Primer:

$$X = [0, 1] = I \quad n=2$$

$$I^2 \quad \begin{matrix} (x,y) \\ (y,x) \end{matrix} \quad (x,y) \sim (y,x)$$

$$S^2 I \cong \triangle$$

3) Limite prostorov

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\lim} (X_n, f_n) = \left(\coprod_{n=1}^{\infty} X_n \right) / \sim$$

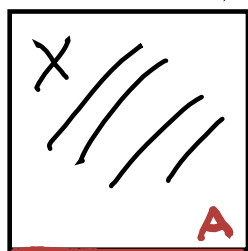
$$x_i \in X_i; \quad x_j \in X_j$$

$$x_i \sim x_j, \text{ če } \exists k > i, j \text{ da je}$$

$$f_k \circ \dots \circ f_{i+n} \circ f_i(x_i) = f_k \circ \dots \circ f_j(x_j)$$

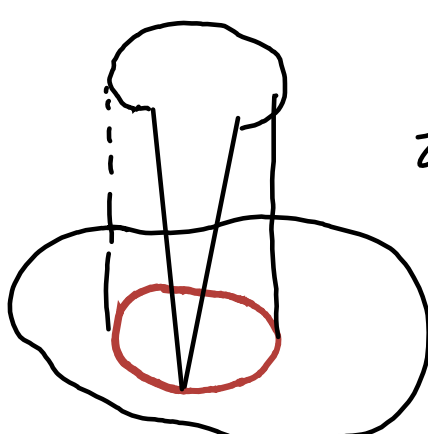
4) Zlepek

$$X, Y, \text{ top. pr } A \subseteq X; \quad f: A \rightarrow Y$$



Zlepek X in Y vsote f je $X \cup_f Y = (X \sqcup Y) / \sim$

$$\begin{matrix} a \sim f(a) \\ A \xrightarrow{f} Y \end{matrix}$$



Zlepek

Ekvivalenčni razredi:

$$[x] = \{x\} \quad x \in X - A$$

$$[y] = \{y\} \quad y \in Y - f_*(A)$$

$$[y] = f^*(\{y\}) \cup \{y\} \quad y \in f_*(A)$$

Primes

1) $A \subseteq X$

$y = \{x\}$

$f: A \rightarrow Y$ konst. preslikova

$X \cup_f Y \simeq X/A$

2) Naj bo $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ homeo

$B^n \cup_f B^n \simeq S^n$

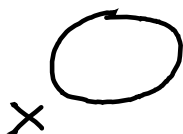


3) Naj bo $f: X \rightarrow Y$ zveza

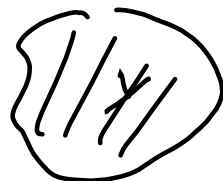
Preslikavn: cilindar je zlepek

$M_f = X \times I \cup_f Y$

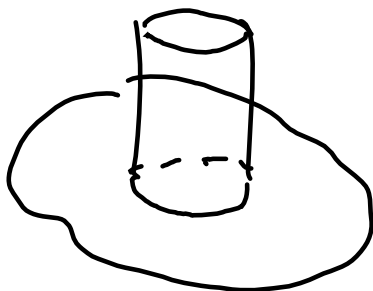
$f: X \times \{0\} \rightarrow Y$



$X \times I$



M_f



Izrek: (normalnost delkov)

X, Y normalne prostora

$A \subseteq X$ zaprt $f: A \rightarrow Y$ zveza

Potem je zlepek $X \cup_f Y$ normalen

Dokaz:

normalnost: $T_1 + T_4$

2: $X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ kvacienta proj

Netrivialn: del. razredi so oblike

$$f^*(y) \cup \{x\}, y \in f_*(A)$$

T_1 : kvacient je $T_1 \Leftrightarrow$ del. razredi zaprti

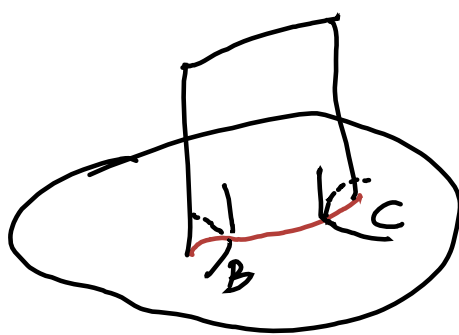
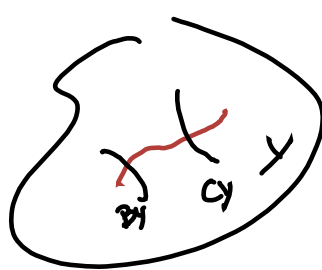
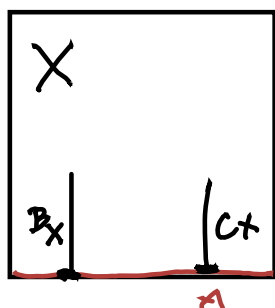
(ker sta X, Y T_1 so točke zapte)

ker je f zveza in so točke zapte je tudi $f^*(\{y\})$ zaprt zato so vsi del. razredi zaprti

T_4 : Urisnava kna:

~~zveza~~ $T_4 \Leftrightarrow$ en papuba, dis. vz. množici iščemo urisnava funkcij

Naj bosta $B, C \subseteq Z$ disjunktni, zap., neprazni:



Naj bo $B_X = g^*(B) \cap X$ C_X podobno

$$B_Y := g^*(B) \cap Y \quad C_Y$$

Te množice so zapte $B_X \cap C_X = \emptyset$
 $B_Y \cap C_Y = \emptyset$

ker je Y T_4 obstaja Urisnava funkcije $f_Y: Y \rightarrow [0, 1]$

$$f_Y|_{B_Y} = 0 \quad f_Y|_{C_Y} = 1$$

Definirajmo $\psi: D_X \cup C_X \cup A \rightarrow [0, 1]$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in B_X \\ 1 & ; y \in C_X \\ f_Y(f(x)) & ; x \in A \end{cases}$$

ψ je dobra definirana

Po tistega ista lahko ψ razširimo do zveze

$f_X: X \rightarrow [0, 1]$ ki je urisnava funkcija

Funkcij: f_X in f_Y pa skupaj določata

iskano urisnava funkcijo na delu 2

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \overset{x}{X} \sqcup \overset{y}{Y} \\ \downarrow \varepsilon \\ Z = X \cup_f Y \end{array} & \xrightarrow{f_X \sqcup f_Y} & I = [0, 1] \\ & \searrow \varphi & \end{array}$$

za $x \in X$ $y \in Y$ je $x \sim y \Leftrightarrow y = f(x) \in f(A)$

$$f_X(x) = \psi(x) = f_Y(f(x)) = f_Y(y)$$

$\Rightarrow$ inducirana funkcija obstaja in ker sta

f_X, f_Y zvezi je tudi inducirana zveza

$\Rightarrow \varphi$ je Urisnava saj je $f_X|_B = 0$ $f_Y|_C = 1$

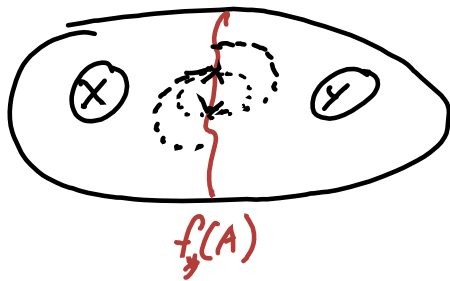
Trditvi: $A \subseteq X$; $f: A \rightarrow Y$

Označimo $Z = X \cup Y$

1) če sta X, Y z -števna je tudi Z z -števna

2) če sta $X, Y \in T_2$ je tudi $Z \in T_2$

Dokaz



Naj bo $B_X = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ baza za X
 $B_Y = \{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ baza za Y

Za poljubne $n, m \in \mathbb{N}$ naj bo

$$W_{n,m} = (U_n \cap A) \cup (V_m \cap f^*(A))$$

$W_{n,m} \neq \emptyset$ je oveden odprta v A zato

$$\exists W_{n,m}^X \subseteq U_n \text{ in } W_{n,m}^X \cap A = W_{n,m}$$

$$\exists W_{n,m}^Y \subseteq V_m \text{ in } W_{n,m} \cap f^*(A) = f(W_{n,m}^Y)$$

Naj bo

$$B = \{g(U_n) : U_n \in B_X, U_n \cap A = \emptyset\} \cup$$

$$\{g(V_m) : V_m \in B_Y, V_m \cap f^*(A) = \emptyset\} \cup$$

$$\{g(W_{n,m}^X \cup W_{n,m}^Y) : W_{n,m} \neq \emptyset\}$$

B je števna

Množice v B so odprte, ker so U_n, V_m in $W_{n,m}^X \cup W_{n,m}^Y$ nasitene odprte, če se nahajajo v dol. družini B

Potrebni moramo se da je neke mn. v koo, top. pr. Zunija množic iz B .

Za to je dovolj pokazati da za vsako množico D odprta v Z in vsako točko $d \in D$.

$$\exists \text{ mn. } W \in B : d \in W \subseteq D$$

$g^*(d)$ lahko ena točka v X ali Y ali pa

vsebuje več točk. eno v A in njeno slika v Y

lajno pride:

$$g^*(d) = \{x \in X$$

$$x \in g^*(d) \cap X^{\text{odp}} \subseteq X$$

$$\text{ker } X \in A \text{ je } x \in g^*(d) \cap X \cap A^{\text{odp}}$$

$$\exists U_n \in B_X \text{ da je } x \in U_n \subseteq g^*(d)$$

$$\text{zato je } g(x) = d \in g(U_n) \in B$$

$$g^*(d) = \{x\} \subseteq Y \quad x \in f^*(A) \quad \text{problem kot zgoraj}$$

$$d \in g(V_m) \subseteq D$$

$$g^*(d) = \{x, y\} \quad x \in A \quad y \in f^*(A)$$

$$\text{za } x \exists U_n \in B_X : x \in U_n$$

$$\text{za } y \exists V_m \in B_Y : y \in V_m$$

$$\Rightarrow x = f^*(y) \in f^*(V_m)$$

$$\Rightarrow x \in W_{n,m}$$

$$\Rightarrow W_{n,m}^X \subseteq g^*(d) \quad W_{n,m}^Y \subseteq g^*(d)$$

$$\Rightarrow \{d \in g(U_n^X \cup V_m^Y)\} \subseteq D$$

2) $X, Y \in T_2 \Rightarrow Z \in T_2$



se je vse, ene ne le eni, manj problem

1.5 Projekтивni prostori

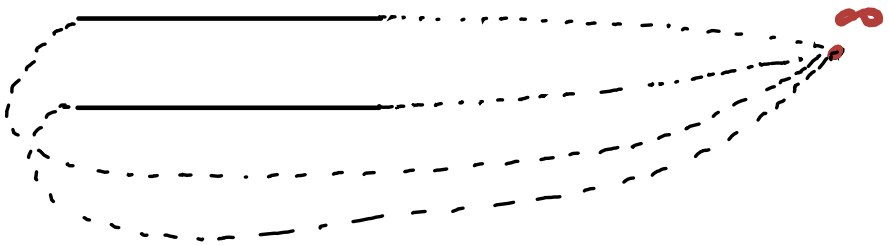
V ravninski evklidski geometriji za medsebojno lego dveh premic nastopita dve možnosti:

- se sekata v natanko eni točki
- sta vzporedni

Zato je včasih v dokazih potrebno obravnavati dve možnosti.

Želeli bi, da je situacija vedno enaka.

Torej da se poljubni premici sekata v natanko eni točki



To naredimo tako, da dodamo točko v ∞ na ta način da vsakemu snopu vzporednih premic, ki je skupna vsem premicam v snopu

Vsek snop vzporednih premic deli svojo neskončnost

Izkaže se da se v dobljenem projektivnem prostoru (projektivna ravnina $\mathbb{RP}^2$) poenostavi tudi opis stožnic

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{ \text{premice v } \mathbb{R}^2 \} // \leftarrow \text{vzporednost}$$

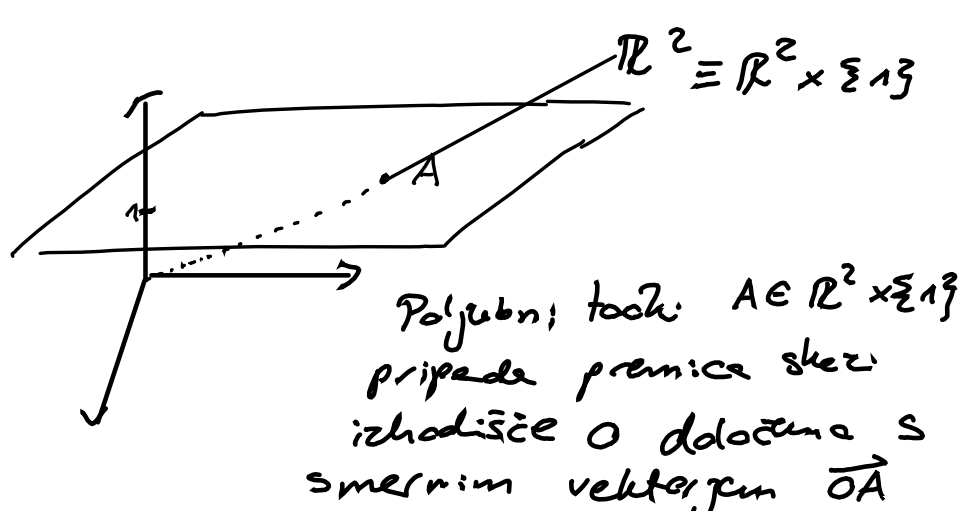
• kakšna je topologija na $\mathbb{RP}^2$

Dodeli smo neskončno točk v neskončnosti

Ali te točke sestavljajo kak geometrijski objekt

Ali $\mathbb{RP}^2$ izgleda enako v okolici ∞ točk kot v okolici končnih

Točke v $\mathbb{RP}^2$ lahko opišemo na enak način



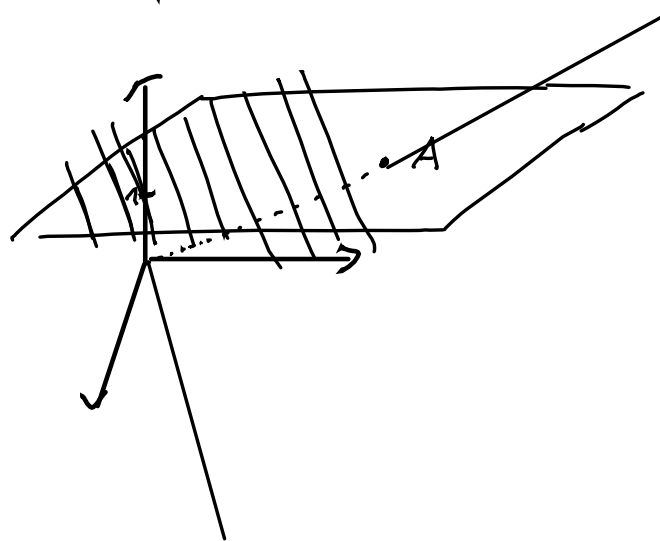
Točka A je edino presečišče te premice z ravnino $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$

Na ta način dobimo bijekcijo med točkami:

na $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ in premicami skozi O v $\mathbb{R}^3$ ki:

ne ležijo na ravnini: $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$

Premice skozi $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ pa so v korespondenci s snopi vzporednih premic na $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$



Torej je $\mathbb{RP}^2 = \{ L : L \text{ 1-dim lin. prostor v } \mathbb{R}^3 \}$

$$\mathbb{RP}^2 = \{ L - \{0\}, L \text{ 1-dim lin. prostor v } \mathbb{R}^3 \}$$

↑
paroma disjunktni, njihova unija je $\mathbb{R}^3 - \{0\}$

To razbitje $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ določa ekvivalenčno relacijo.

Ekvivalentni razredi so 1-dimenzionalni linearni podprostorji brez izhodišča

$$x, y \in L - \{0\} \iff \exists \lambda \neq 0. y = \lambda x$$

$$L - \{0\} = \{ \lambda x ; x \in \mathbb{R}^x \}$$

||
[x]

To je orbite delovanja $\mathbb{R}^x$ na $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ z množenjem s skalarji

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^3 - \{0\} / \sim = \mathbb{R}^3 - \{0\} / \mathbb{R}^x$$

↑
prostor orbit pri delovanju grupe $\mathbb{R}^x$

Def: Naj bo $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ in naj bo $n \in \mathbb{N}_0$

Projektivni prostor dimenzije n nad obsegem F je

$$\mathbb{P}^n := \frac{F^{n+1} - \{0\}}{x \sim \lambda x; \lambda \in F^\times} = \frac{F^{n+1} - \{0\}}{F^\times}$$

opremljen s kvocienčno topologijo.

Opomba: enako lahko naredimo za poljubni topološki obseg

Trditar:

Naj bo $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ $n \in \mathbb{N}_0$

FP^n je homogen prostor

(t.j. za poljubne $x, y \in FP^n$. $\exists$ h homom FP^n .
 $h(x) = y$)

Dokaz:

$$\begin{array}{ccc} F^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{H} & F^{n+1} - \{0\} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ FP^n & \xrightarrow{h} & FP^n \\ [v] = x^\vee & \xrightarrow{h} & y^\vee = [w] \end{array}$$

za H bomo izbrali linearni izomorfizem
ki v slike v w

v dopolnimo do baze F^{n+1}

$v, v_1, v_2, \dots, v_n$

w dopolnimo do baze F^{n+1}

$w, w_1, \dots, w_n$

za H vzamemo prehodno preslikavo,
ki slike bazne vektorje v bazne vektorje
(z istim indeksom)

H je homeomorfizem $\Rightarrow g \circ H$ je kvocientna
 $g \circ H$ naredi iste identifikacije kot g

(skisne premice v točke, H pa je bijekcija
med premicami:

$\Rightarrow$ inducirana preslikava h je homeo

$$\text{in } h(x) = h([v]) = g(H(v)) = g(w)$$

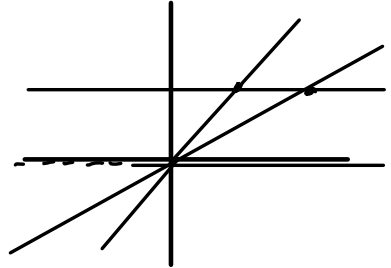
Primeri:

$$1) F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$$

$$FP^0 = F^1 - \{0\} / F^\times = F^\times / F^\times = \{*\}$$

$$2) FP = ?$$

$$FP^1 = F^2 - \{0\} / F^\times$$

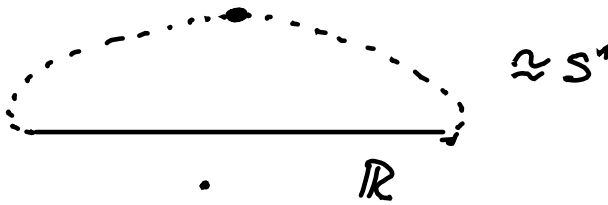


zdi se da je

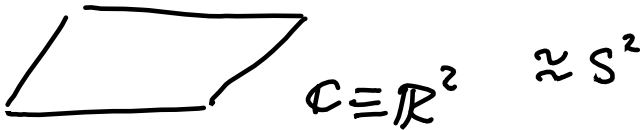
$$FP^1 = F \cup \{\infty\} \text{ kompaktifikacija } \mathbb{R}^1 \text{ točko}$$

(za zdaj se ugibanje)

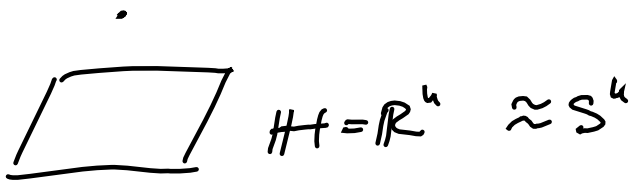
$$\mathbb{R}P^1$$



$$\mathbb{C}P^1$$



$$\mathbb{H}P^1$$



$$d = \dim_{\mathbb{R}} F = \begin{cases} 1 & F = \mathbb{R} \\ 2 & F = \mathbb{C} \\ 4 & F = \mathbb{H} \end{cases}$$

$$FP^1 = S^d$$

(3) $\mathbb{R}P^2$ je neka sklenjena ploskev, ki pa

ni S^2

Trditelj: $\mathbb{F}P^n$ ima pokritje z $n+1$ odprtimi množicami, ki so homea. $\mathbb{F}P^n \cong \mathbb{R}^{2n+1}$

Dokaz: $\mathbb{F}P^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ $U_i = \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^{n+1} : x_i \neq 0 \}$
 $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad i \in \{0, \dots, n\}$

U_i je odprta za $\forall i: \{U_0, \dots, U_n\}$ so torej

odprto pokritje za $\mathbb{F}P^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$

ker so U_i nasičene so $g_*(U_i)$ odprti $\subseteq \mathbb{F}P^n$
in tvorijo odprto pokritje

$$g_*(U_i) \cong \mathbb{F}^n$$

Dava l.j. je dokazati za $i=0$:

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{f} & \mathbb{F}P^n \\ \downarrow g_0 & \searrow \bar{f} & \\ g_*(U_0) & & \end{array}$$

$$\lambda(x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$f(x_0, \dots, x_n) = (x_0^{-1}x_1, \dots, x_0^{-1}x_n)$$

f sliko ekvivalentne točke v iste

$$\begin{aligned} f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) &= (x_0^{-1} \lambda^{-1} \lambda x_1, \dots, x_0^{-1} \lambda^{-1} \lambda x_n) \\ &= (x_0^{-1} x_1, \dots, x_0^{-1} x_n) \end{aligned}$$

f je zvezna

ker je U_0 odprta je g_0 kvocientna
zato f zvezna $\Rightarrow \bar{f}$ zvezna

Da je $\bar{f}$ zvezna homeo. sledi iz obstoja
inverzne zvezne preslikave

$$\text{Naj } \iota_0: G \rightarrow \mathbb{F}P^n \rightarrow g_*(U_0)$$

$$G \cdot (u_1, \dots, u_n) = \sum (1, u_1, \dots, u_n) \text{ zvezna}$$

in očitno inverzna $\bar{f}$

Posledica: $FP^n \in T_2$

Dokaz:

$$x, y \in FP^n ; x \neq y$$

$$x = [v] \quad v = (v_0, \dots, v_n)$$

1) $v_i \neq 0 \Rightarrow \forall i \in \{0, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \exists U_i \text{ tak da } v_i \Rightarrow x \in U_i \text{ tak da}$$

Ampek tak $y \in$ vsaj en j da je $y \in U_j$

$$\text{Torej } x, y \in U_j \subset FP^n = \mathbb{R}^{n+1}$$

x in y imata v U_j disjunktni

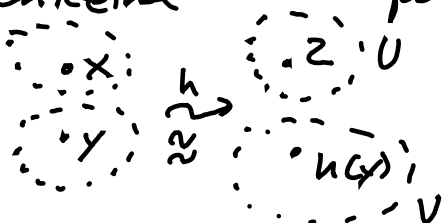
okolice in ker je U_j odprta v FP^n imata okolice v celotnem prostoru

2) Splošen primer:

po homogenosti FP^n lahko x s homeo.

h preslikamo v $\mathbb{Z}$, ki ima vse komponente

nenuljne



$h^*(U)$ in $h^*(V)$ sta disjunktni okolice x in y

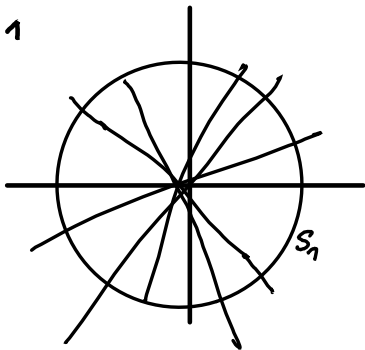
Zanimajo nas top. lastnosti FP^n

Če $n \geq 1$ je $FP^{n+1} \Rightarrow FP^n$ povezan

FP^{n+1} lok. povezan $\Rightarrow FP^n$ lok. povezan

Pokazati želimo da so FP^n kompaktni:

RP^1



v FP^k označimo
enotsko sfero $S(F^k)$
 $= \{x \in F^k; \|x\|=1\}$

$$F = \mathbb{R} \Rightarrow S^{k-1}$$

$$F = \mathbb{C} \Rightarrow S^{2k-1}$$

$$F = \mathbb{H} \Rightarrow S^{4k-1}$$

Ker je F topološki obseg množenje z
enotskimi skalarji ohranja enotsko sfero $S(F^k)$,
zato delovanje FX na FP^{n+1} (množenje
s skalarji) določa delovanje $S(F)$ na
enotsko sfero na $S(F^{n+1})$

$$S(F) = \begin{cases} S^0 & F = \mathbb{R} \\ S^1 & F = \mathbb{C} \\ S^3 & F = \mathbb{H} \end{cases}$$

Trditelj: $\mathbb{F}P^n \approx S(F^{n+1})/S(1F)$

Dokaz:

$$S(\mathbb{F}^{n+1}) \hookrightarrow \mathbb{F}^{n+1} - \{0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow p & \searrow f_{\text{noc}} & \downarrow \cong \\ S(\mathbb{F}^{n+1}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{F}P^n \\ \downarrow & & \\ S(\mathbb{F}^{n+1}/S(1F)) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{F}P^n \end{array}$$

f naravno: iste identifikacije kot p

$$\Rightarrow f \text{ je homeo}$$

Pokaželi smo da so $\mathbb{F}P^n$ kompaktni:

V

markel
son

$$y \in AE(\mathbb{R}): \forall x \in \mathbb{R}, \forall A \text{ zap} \subseteq X \quad 1.4$$

$$\forall f: A \rightarrow Y. \exists \text{ restriction } F: X \rightarrow Y$$

$$F|_A = f$$

$$\text{T:etze: } j \in \mathbb{R} \text{ mterol } j \in AE(N)$$

↑
normeln;
prostor;

Trditev:

- 1) Biti $AE(R)$ je top. lastnost
- 2) Produkt $AE(R)$ je $AE(R)$
- 3) Retrakt $AE(R)$ je $AE(R)$

Def: R družina top. pr $y \in AE(R) \dots$
absolutni retrakt za družino R

1) $y \in R$

2) za $\forall$ zaprto vložitev $p: y \rightarrow X$ $X \in R$
je slike $p_*(y)$ retrakt prostora X

Trditev: $R \cap AE(R) \subseteq ARLR$

Dokaz:

$$y \in R \cap AE(R)$$

izberimo poljuben $X \in R$ in naj bo

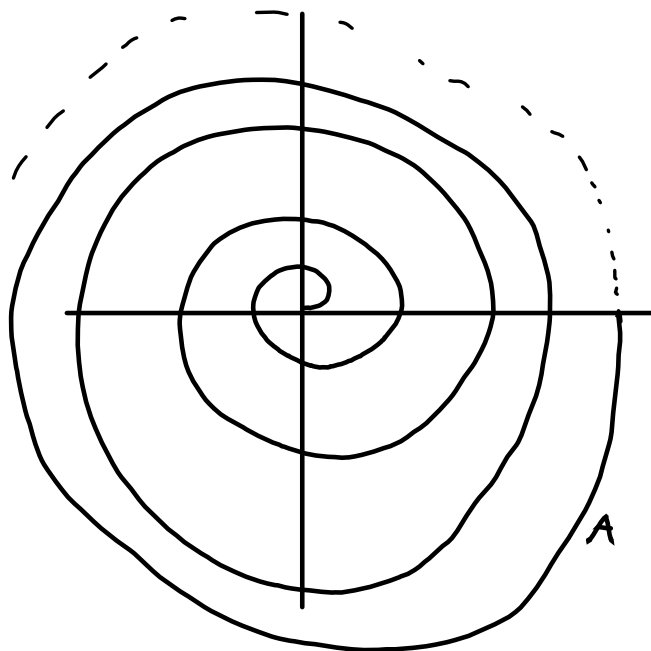
$p: y \rightarrow X$ poljubna zaprta vložitev

Označimo $A := p_*(y) \overset{zp}{\subseteq} X$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id} & A \\ \downarrow & \swarrow \cdots & \\ X & & \end{array} \quad A \approx y \quad \text{zato } A \in AE(R)$$

$\exists r$ retrakcija

Ali je spirala retrakt ravnine



lahko gre
v neskončnost
ali pa je
kompaktna
(ker ma a kiti
zapirte)

Ja, kompakten je izomorfen $[a, b]$, ki je
 $AE(N)$ zato je $AR(N)$

Nekompaktna spirala pa je homeomorfna
 $J = [0, 1) \in AE(N) \cap N \subseteq AR(N)$

Izjava B_n : Izrek o neobstaju retraktov

Sfera S^{n-1} ni retrakt B^n

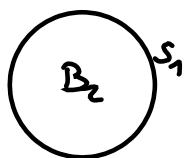
$n=1$: S^0 ni retrakt B^1

"
 $\{-1, 1\}$

"
 $[-1, 1]$

ževemo
ker $\{-1, 1\}$ ni
povezan

$n=2$

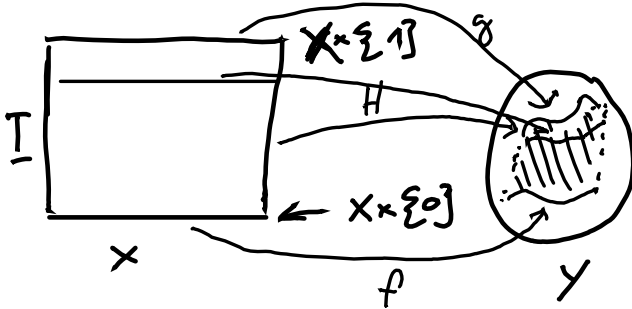


Izjav trdita ne obstaja
zveze priobkova, ki ne imajo
 $n \in S_1$ $r: B^2 \rightarrow S^1$

Amplek S_1 je retrakt $B_2 - \{0\}$

Za zadnjo izjavo povezava z Banwejer, in
izrekom o van negih to ok, shtokajena
pojém komdopijo

Def: f, g sta homotopni, če med njima obstaja kakšna homotopija, ki je zv. preslikavo $H: X \times I \rightarrow Y$ za katero velja

$$H(x, 0) = f(x) \quad H(x, 1) = g(x)$$


za $\forall t \in I$ definiramo. $H_t: X \rightarrow Y$

$$x \mapsto H(x, t)$$

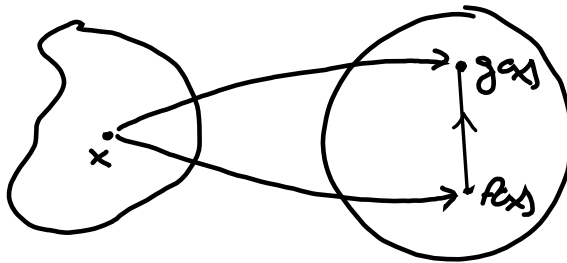
Def:

Prostor X je kontraktilen, če je id_X homotopna neki konstantni preslikavi. Pri preložitvi homotopije imenujemo kontrakcijo

$$X \simeq *$$

Primer

1) Za polj. prostor X sta polj. preslikavi $f, g: X \rightarrow B^n$ homotopni:



s pomearno homotopijo

$$H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

H je očitno vezna

Op: B^n lahko zamenjamo s poljubno konveks. mn.

2) B^n je kontraktilen id $B^n \rightarrow B^n$ je

po 1) homotopna konst. $c: B^n \rightarrow B^n$
 $x \mapsto 0$

Opomba: Enako velja za zvezdaste množice

3) $\mathbb{R}^n$ je kontraktilen: $(x, t) \mapsto (1-t)x$

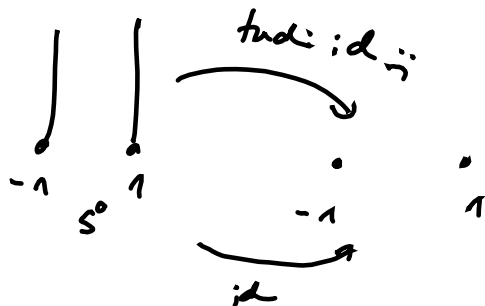
4) Ali je S^0 kontraktilna

$$S^0 = \{-1, 1\}$$

Konstruiraj $H: S^0 \times I \rightarrow S^0$

$$H_0 = \text{id}$$

$$H_1 = \text{const}$$



Ker je I povezan je slik $\{-1, 1\}$ pri
 homotopiji H povezan in ker $H(-1, 0) = -1$

$$\Rightarrow H(\{-1, 1\} \times I) = \{-1\}$$

$$\text{Podoben } H(\{1\} \times I) = \{1\} \Rightarrow H_1 = \text{id}$$

$$\Rightarrow S^0 \simeq \text{konst} \text{ zato } S^0 \text{ ni}$$

Izjava C_n Sfera S^{n-1} ni kontraktilna
 opomba: primer je $n=1$ je ne prejzji stvari
 videlimo da so A_n, B_n in C_n
 ekvivalentne

Taditer: za $\forall n \in \mathbb{N}$ so izjave A_n, B_n in C_n
 ekvivalentne

Dokaz: Vse implikacije bomo dokazali: ^{protislovijem} ~~kon~~

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$$

- A_n : B^n ima lastnost negibne točke
- B_n : S^{n-1} ni retrakt B^n
- C_n : S^{n-1} ni kontraktilna

$A_n \Rightarrow B_n$

Recimo da $\neg B_n$

Naj bo $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$ retrakcija
 iscema zu $f: B^n \rightarrow B^n$ brez negibne točke

Naj bo $f(x) := -r(x)$

$$f: B^n \xrightarrow{r} S^{n-1} \xrightarrow{(-)} S^{n-1} \hookrightarrow B^n$$

iscema negibne točke

$$f(x) = x$$

$$\underbrace{-r(x)}_{\in S^n} = x \Rightarrow x \in S^n$$

če obstaja negibna točka je na sferi

$$x \in S^n \Rightarrow r(x) = x$$

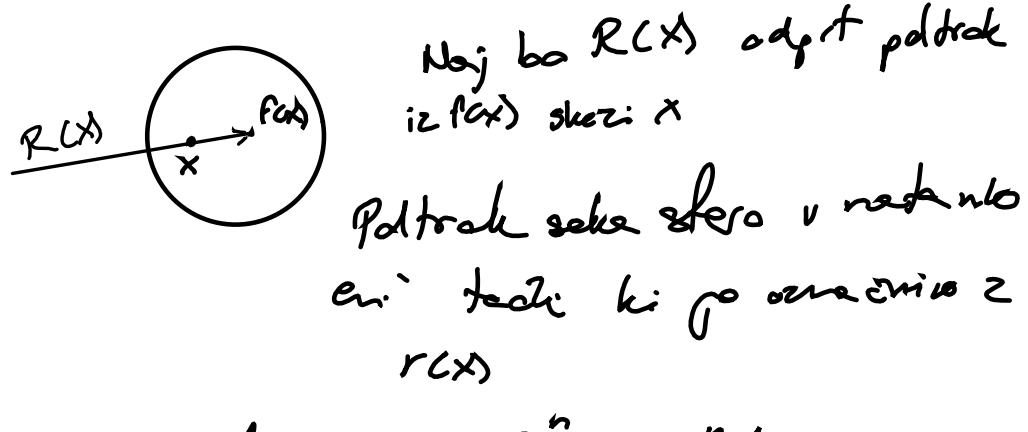
$$x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin S^{n-1}$$

$B_n \Rightarrow A_n$

Predpostavimo $\neg A_n$

$\exists f: B^n \rightarrow B^n$ brez negibne točke

$$\forall x \in B^n. f(x) \neq x$$



Tako dobimo $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$

$$x \in S^{n-1} \Rightarrow R(x) \cap S^{n-1} \ni x \text{ in zato } r(x) = x$$

Preveriti jtreba dobro definirano in veznost

$B_n \Rightarrow C_n$ predpostavmo $\neg C_n$

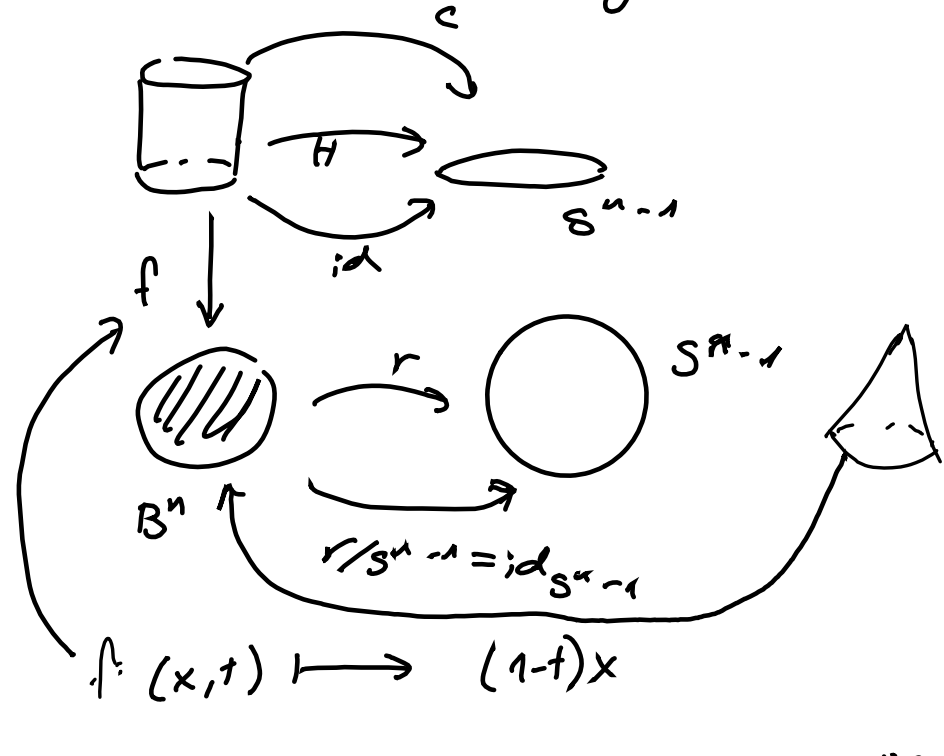
S^{n-1} je kontraktilna: $\exists$ kontrakcija

$$H: S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-1}$$

$$H_0 = id$$

$$H_1 = c \text{ konstanta}$$

Poiskati moramo retrakcijo $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$



$f: S^{n-1} \times I \rightarrow B^n$ je zvezna, surjektivna in zaprta
 kaj je kvocien

f je injektivna na $S^{n-1} \times \{0, 1\}$

$S^{n-1} \times \{1\}$ je preslikov 1 točka

eti
 Edini nerazred ~~domen~~ razred ki ga določa f je $S^{n-1} \times \{1\}$ tega polt slike va
 Zato je H konst na vku razreda
 Torej določa ind. presl. $B^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$
 iz zveznosti H sledi zveznost

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} \times I & \xrightarrow{H} & S^{n-1} \\ \downarrow f & \nearrow r & \\ B^n & & \end{array}$$

Trdimo se: $r|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$

$$\begin{array}{ccc} (x, 0) & \xrightarrow{H} & H(x, 0) = H_0(x) = x \\ \downarrow f & & \uparrow r \\ x & & \end{array}$$

$B_n \Leftrightarrow C_n$

Predpostavimo $\neg B_n$

$\exists$ retr. $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$

Poiskati moramo kontraktilno sfero S^{n-1} tj.

$$H: S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-1} \quad H_0 = id \quad H_1 = c$$

$$Varnost H = r \circ f$$

$$res: H_0 = id_{S^{n-1}}$$

$$H_1 = \bullet r(0)$$

Ahh

Epici

nehje pred 30

strano