

ocena iz teorije : ustni izpit

ocena iz vaj : domače naloge

Uvod

Oznake:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n \leftarrow \text{multiindex}$$

"Notation is a nightmare" - L. Evans

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Za $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ definiramo

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Ponavadi bomo delali v dveh spremenljivkah

$|\alpha|$, ... *red parcialnega odvoda*

za $k \in \mathbb{N}$ definiramo $D^k u := \{D^\alpha u; |\alpha| = k\}$

za $k=1$ elemente uredimo v vektor

$$\nabla u := (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u) \text{ je } \text{gradient}$$

za $k=2$ elemente uredimo v matriko

$$D^2 u = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right]_{j,k=1}^n \dots \text{Hessejeva matrika}$$

↙ odvedljivost dovolj visokega reda

Za gladko vektorsko polje

$$\vec{F} = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definiramo *divergenco* $\operatorname{div} \vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

$$\{\text{skalarne funkcije}\} \xrightleftharpoons[\text{div}]{\text{grad}} \{\text{vekt. funkcije}\}$$

divergenca je **adjungirani operator** za grad
 Spomnimo se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrike, potem je
 adjungirana matrika A^* ($= A^T$ v realnem) definirana
 s predpisom $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$

$$\text{Velja: } \langle \nabla u, \vec{F} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)} = - \langle u, \text{div} \vec{F} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})}$$

To pomeni (za realne A)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u(x), \vec{F}(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} dx = - \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \text{div} \vec{F}(x) dx,$$

če sta $u, \vec{F}$ reda C^1 s kompaktnim nosilcem

če je $U^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $u \in C^2(U)$ označimo

$$\Delta u := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

Spomnimo se Δ je **Laplaceov operator**.

$$\text{Velja } -\text{div} \circ \nabla = \nabla^* \circ \nabla = -\Delta$$

$\nwarrow$ formalno

To je **pozitivni Laplaceov operator**

$$\langle -\Delta u, u \rangle = \langle \nabla^* \nabla u, u \rangle = |\nabla u|^2 \geq 0$$

Definicija. **Parcialna diferencialna enačba (PDE)** je enačba, ki vsebuje neznano funkcijo vsaj dveh spremenljivk ter nekatere njene parcialne odvode.

PDE k-tega reda je relacija oblike

(1) $F(x, u(x), \dots, D^k u(x)) = 0$, kjer je $x = (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ in je $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$ podana funkcija, funkcijo $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ pa iščemo.

Opomba: za k-ti red zahtevamo da $D^k u$ netrivialno nastopa v (1)

Primeri:

- 1.) $x u_x + e^{xy} u_y = y$ $u = u(x, y)$ je prvega reda
- 2.) $u_t = k u_{xx}$ $u = u(x, t)$ je drugega reda

Opomba: če namesto ene funkcije iščemo vektorsko funkcijo $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (pri ustreznem spremenjenem $\vec{F}$) se enačba (1) imenuje **sistem PDE reda k**

Rešitev PDE je vsaka funkcija, ki zadošča (1)

OSNOVNI TIPI PDE

1. linearna LPDE

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f \quad (a_\alpha, f \text{ so podani, } u \text{ iščemo})$$

za $f \equiv 0$ dobimo **homogeno LPDE**

2. semilinearne

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u + b(x, u, Du, \dots, D^{k-1}u) = 0$$

linearne v najvišjem redu, karkoli:
v nižjih redih

3. kvazilinearne

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{k-1}u) + b(x, u, Du, \dots, D^{k-1}u) = 0$$

4. nelinearne

enačba, ki je nelinearno odvisna od odvodov
najvišjega reda

Primeri:

1.) Laplaceova enačba

$$\Delta u = 0 \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

to je linearna enačba reda 2

$$k=2 \quad a_\alpha(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{če } \alpha = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0) \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

2.) Poissonova (ali nehomogena Laplaceova) enačba

$$\Delta u = f \quad \text{linearna}$$

3.) Nelinearna Poissonova enačba

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{je semilinearna}$$

4.) p -Laplaceova enačba

$$\text{za } 1 < p < \infty$$

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0$$

za $p=2$ je to Laplaceova enačba

za $p \neq 2$:

za $u \in C^2$ in na $\mathbb{R}^n$ $\nabla u \neq 0$ velja

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j}) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} (|\nabla u|^{p-2}) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} + |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \\ & \frac{\partial}{\partial x_j} ((\partial_{x_1} u)^2 + \dots + (\partial_{x_n} u)^2)^{\frac{p-2}{2}} = \\ & = \frac{p-2}{2} (|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}-1} \cdot \sum_{k=1}^n 2(\partial_{x_k} u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \end{aligned}$$

$$= \langle |\nabla u|^{p-2}, \nabla u \rangle + |\nabla u|^{p-2} \Delta u =$$

$$= \langle (p-2) |\nabla u|^{p-4} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} + |\nabla u|^{p-2} \Delta u =$$

$$= |\nabla u|^{p-2} (\Delta u + (p-2) \langle D^2 u \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \rangle)$$

p -Laplaceova enačba $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0$

je za $p \in (0, \infty) - \{2\}$ kwazilinearna

Monge-Ampereova enačba

20.2

$$\det(D^2 u) = f$$

"

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right]$$

je povsem nelinearna

Definicija (J. Hadamard 1902) ↙ not Cauchyjev problem

Pravimo da je problem (PDE + pogoji)

dobro postavljen (ang. well posed / ill posed nasprotje),

če ima naslednje lastnosti:

1. Rešitev obstaja

2. Rešitev je ena sama

→ 3. Rešitev je vezno odvisna od začetnih podatkov
stabilnost

Trditev: Naj bo $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ in $f \in C^2(U)$.

Tedaj velja naslednje:

$$\Delta f(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2n}{r^2} \frac{1}{\omega(s_r)} \int_{s_r} (f(x) - f(0)) d\omega(x)$$

kjer je $\omega(s_r)$ $(n-1)$ -dimenzionalna
mera odprte sfere $S^{n-1}(0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$

Povprečje $f - f(0)$ po s_r
 $= \langle f - f(0) \rangle_{s_r} = \langle f \rangle_{s_r} - f(0)$

Dokaz:

Po Taylorjevi formuli: za $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) x_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) x_j x_k + \underbrace{o(|x|^2)}_{\in C^2}$$

integriramo: $\int_{s_r} x_j d\omega(x) = 0$ zaradi lihosti za $\forall j$

$\int_{s_r} x_j x_k d\omega(x) = 0$ za $x_j \neq x_k$ zaradi lihosti

$$\int_{s_r} x_j^2 d\omega(x) = \int_{s_r} x_1^2 d\omega(x) \text{ za } \forall j$$

$$\int_{s_r} (f(x) - f(0)) d\omega(x) = 0 + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(0)}_{\Delta f(0)} \frac{1}{n} \int_{s_r} (x_1^2 + \dots + x_n^2) d\omega(x) + \int_{s_r} o(|x|^2) d\omega(x)$$

$$= \frac{1}{2} \Delta f(0) \cdot \frac{1}{n} r^2 \omega(s_r) + \int_{s_r} o(|x|^2) d\omega(x)$$

$$\Rightarrow \Delta f(0) = \frac{2n}{r^2} \frac{1}{\omega(s_r)} \underbrace{\int_{s_r} (f(x) - f(0)) d\omega(x)}_{\langle f - f(0) \rangle_{s_r}} + 2n \underbrace{\left\langle \frac{o(|x|^2)}{|x|^2} \right\rangle_{s_r}}_{\in O(1)}$$

Oznaka: $\langle g \rangle_M = \frac{1}{|M|} \int_M g$ povprečje g po M

Oznaka: $g = o(\varphi(x))$; $x \rightarrow a$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\varphi(x)} = 0$ (ne tedi; je pisal
puščico $x \rightarrow a$ žepnej,
jaz je nisem pisala)

Primer:

Toplotna enačba (trailer) $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u$

u ... temperatura odvisa od časa

x ... element (točka) na palici

Trditev:

Laplacov operator Δ je invarianten glede na toge premike. To pomeni, da je

$$\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R \quad \Delta = R(\Delta u) \circ R^{-1},$$

kjer je $R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bodisi

i) premike (translacija)

ii) ortog. transt. (npr. rotacija)

Dokaz: DN

Kvazi: linearne enačbe 1. reda

(v duhu spremenljivkah)

25.2.

To so enačbe

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u),$$

kjer so a, b, c podane funkcije, u pa iščemo

Cilj, poglavja: eksistenčni izrek za KLE

Naloge bomo reševali z **metodo karakteristik**.
(gledamo kaj more vstopiti iz lastnosti enačbe)

Enačbe KLE so v ekvivalentnem zapisu kot

$$(a, b, c) = (a, b, c)(x, y, u(x, y))$$

$$(a, b, c) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0 \iff (a, b, c) \perp (u_x, u_y, -1)$$

↑
vektorsko polje

Ideja: Privzamimo, da že imamo rešitev u za KLE.

Poskušamo izluščiti potrebne pogoje za u iz katerih naj bi obstoj u dokazali:

Ploskev (graf) $z = u(x, y)$, kjer u reši enačbo, se imenuje integralna ploskev.

Naj bo $\vec{r}(x, y) = (x, y, u(x, y))$, $x, y \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, parametrizacija grafa u . Vemo naslednje:

- normala na ploskev je dana z $\boxed{\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-u_x, -u_y, 1)}$

(Vek. polje (a, b, c) je pravokotno na normalo v vsaki točki)

To pomeni, da $(a, b, c)(p_0)$ leži v tangentni

ravnini na ploskev $z = u(x, y)$ v točki p_0

~ v točki p_0 je definirana kot množica vseh tangentnih vektorjev (množica tangentnih vektorjev v točki p_0 , ne krivulje, ki ležijo na ploskvi in gredo skozi p_0)

$$T_{p_0} S = \left\{ \dot{\gamma}(0); \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ reg. par. 1 } \gamma(0) = p_0 \right\}$$

↑
neka ploskev

$$\langle (a, b, c), (u_x, u_y, -1) \rangle = 0 \text{ na } \Gamma_u$$

$\Rightarrow$ Zanimajo nas krivulje z odvod: v ravnini (a, b, c)

Definicija. vektor (a,b,c) se imenuje **karakteristična smer** za kvazilinearno enačbo.

$V := (a,b,c) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je pripadajoče **karakteristično polje**.

Tokovnica (oz. **integralska krivulja**) polja V je krivulja $\gamma = \gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, ki reši sistem NDE $\dot{\gamma} = V(\gamma) = V \circ \gamma$

To pomeni, da če komponente γ označimo z $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, tedaj

$$\dot{x} = a(x, y, z) \quad \leftarrow \quad \dot{\gamma}(t) = a(x(t), y(t), z(t))$$

$$\dot{y} = b(x, y, z)$$

$$\dot{z} = c(x, y, z)$$

Tokovnice polja $V(a,b,c)$ so **karakteristične krivulje** oz. **karakteristike** enačbe KLE

Analiza 3: eksistenčni izrek za sisteme oblike $y' = P(x, y)$
 $y_0 = y(x_0)$

- enakomern. Lip. pogoj na 2. spremenljivki

$$\exists \delta > 0, |f(u, v_1) - f(u, v_2)| \leq \delta |v_1 - v_2| \text{ za } \forall (u, v_1), (u, v_2)$$

- zveznost v obeh spremenljivkah

Analogno imamo za sisteme $\dot{\vec{z}} = V(\vec{z})$; $\vec{z}$ iščemo
 ↑
 avtonomen sistem ($y' = f(y)$)

Obstoj takovnic:

Naj bode $a, b, c \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Tedaj je

$V = (a, b, c)$ lokalno Lipschitzova za $\forall$ kvader $Q \subseteq \mathbb{R}^3$
 velja $|V(\vec{x}_1) - V(\vec{x}_2)| \lesssim_Q |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$

Oznaka $A \lesssim B$ pomeni: $\exists C > 0, A \leq CB$

$A \lesssim_a B$ pomeni: $\exists C = C(a) > 0, A \leq C(a)B$

Torej lahko uporabimo eksistenčni izrek za
 sistem NDE, ki pove, da za

$\forall p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3, \exists!$ takovnica polja V . T

Torej $\exists \delta > 0 \wedge \gamma = \gamma_{p_0}: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^3$, tako da

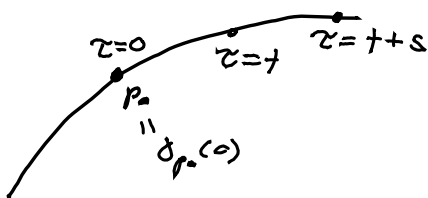
$\gamma = (x, y, z)$ zadošča $\gamma(0) = p_0$ in

$$\dot{x} = a(x, y, z)$$

$$\dot{y} = b(x, y, z)$$

$$\dot{z} = c(x, y, z) \text{ oz } \dot{\vec{z}} = V(\vec{z})$$

Izkaže se: $\gamma_p(t+s) = \gamma_{\gamma_p(s)}(t)$



Ta pomeni, da so
 takovnice disjunktne

Trditev:

- Naj bodo $a, b, c \in C^1(\mathbb{R}^3)$
- $S = \{z = u(x, y)\}$ poljubna integralna ploskev za KLE
- $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S \quad (\Rightarrow z_0 = u(x_0, y_0))$

Tedaj $\forall$ karakteristična krivulja za pripadajočo KLE, ki gre skozi p_0 , cela leži v S

Dokaz: Označimo:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ karakteristična krivulja}$$
$$\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0) = p_0$$

Trditev bo dokazana, če $\gamma(t) \in S$ za $\forall t$ oziroma
če $z(t) = u(x(t), y(t))$ za $\forall t$

Vemo: $z(0) = u(x_0, y_0)$ (ker $p_0 \in S$)

označimo $w(t) = z(t) - u(x(t), y(t))$

Trdimo: $w(t) = 0$ za $\forall t$

$$\dot{w}(t) = \dot{z}(t) - u_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) - u_y(x(t), y(t))\dot{y}(t)$$

Pišemo: $z = w + u(x, y)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x, y, z) & \dot{w} &= c(x, y, w + u(x, y)) \\ \dot{y} &= b(x, y, z) & \Rightarrow & -u_x(x, y)a(x, y, w + u(x, y)) \\ \dot{z} &= c(x, y, z) & & -u_y(x, y)b(x, y, w + u(x, y)) \end{aligned}$$

Vemo: $w(0) = 0$

Cauchyjev problem

oblike $\dot{w}(t) = f(t, w(t))$

$$w(0) = 0$$

kjer je $\sigma(t) = (x(t), y(t))$

$$f(t, w) = c(\sigma, w + u(\sigma)) - u_x(\sigma)a(\sigma, w + u(\sigma)) - u_y(\sigma)b(\sigma, w + u(\sigma))$$

Sledi: $f(\alpha, w_1) - f(\alpha, w_2) = \frac{\partial f}{\partial w}(\xi_\alpha)(w_1 - w_2)$

odvisno od $a, b, c, u_x, u_y, \sigma$
 $\Rightarrow$ zvezno v α

$\Rightarrow$ lahko uporabimo eksistenčni izrek.

Vidimo, da $w \equiv 0$ reši naš sistem saj po predpostavki $u = u(x, y)$ reši našo KLE.

Po eksistenčnem izreku je to lokalno edina rešitev.

$\Rightarrow z(t) = u(x(t), y(t))$ za t iz okolice točke 0

Posledica:

Ob predpostavkah trditve, je vsaka integralna ploskev za KLE unija karakterističnih funkcij (torej tokovnic vekt. polja (a, b, c))

Komentar: S tem lahko reševanje KLE prevedemo na reševanje sistema NDE $\dot{y} = V(y)$ ob različnih začetnih pogojih. Grafe rešitev bomo „združili“ v integralno ploskev za KLE

Dokaz: Videli smo, da skozi vsako točko $\in S$ lahko potegnemo neko tokovnico in vsaka tokovnica je cela vsebovana v S ■

Posledica:

26.2

Ob predpostavkah trditve velja:

- 1) če se dve integralni ploskvi S_1, S_2 za KLE sekata v neki točki $S_1 \cap S_2$, tedaj cela tokovnica skozi p leži v $S_1 \cap S_2$
 - 2) če je preseček $C = S_1 \cap S_2$ krivulja, potem sta S_1 in S_2 integralni ploskvi, ki se ne dotikata. Tedaj je C karakteristična krivulja
-

Dokaz

- 1) sledi iz trditve
- 2) vaje

Primer:

(Transparentna oz. kontinuitetna enačba v $\mathbb{R}$)

$$u_x + bu_y = 0 \quad b \in \mathbb{R} \text{ konst.}$$

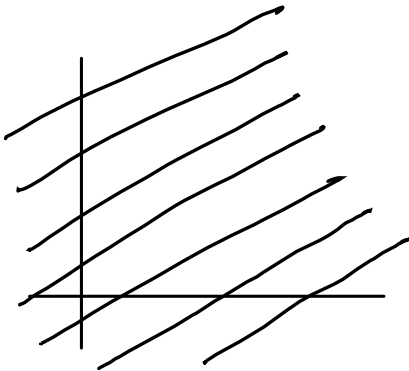
To je linearna (homogena) PDE $\Rightarrow$ pada v okvir KLE

$$a=1, b=b, c=0$$

Torej se karakteristični sistem glasi:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 1 \leadsto x(t) = t + c_1 \\ \dot{y} &= b \leadsto y(t) = bt + c_2 \\ \dot{z} &= 0 \leadsto z(t) = c_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = bx + (c_2 - bc_1)$$

$y = bx + c_4$, z je vzdolž vsake krivulje konstanten



Torej je $z = h(c_4)$

$z = h(y - bx)$ za poljubno odvedljivo funkcijo $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

To je naša iskana funkcija $u(x, y)$ oz. h je dobljena

z zahtuje na y -os

Cauchyjev problem za KLE

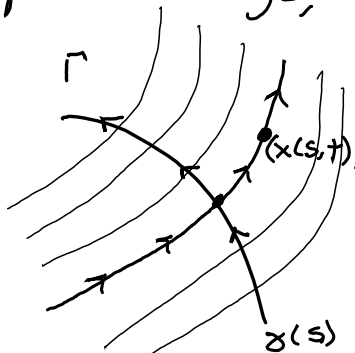
Naj bo Γ gladka krivulja parametrizirana z

$$\gamma(s) = \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases}$$

imenoma C^1 vekt. polje

$$V = (a, b, c)$$

Šeoz poljubno $\gamma(s)$ napeljemo ^{karakteristično} krivuljo, ki vsebuje točko $\gamma(s)$. Lahko privzamemo spremembo parametrizacije, da gre krivulja skozi $\gamma(s)$ v $t=0$.



kje smo začeli

kje smo na naši krivulji

Zanima nas vekt. funkc.

$$R(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

da za $\forall$ fiksen s , reši karakteristično enačbo

$$x_t = a(x, y, z)$$

$$y_t = b(x, y, z)$$

$$z_t = c(x, y, z)$$

in hkrati začetni pogoj $x(s,0) = f(s)$

$$y(s,0) = g(s)$$

$$z(s,0) = h(s)$$

Torej za $F_s := (f(s), g(s), h(s))$ rešujemo

$x_s = \vec{x}_s(t)$, tako da velja

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{x}_s = V(\vec{x}_s) \quad \vec{x}_s(0) = F_s} \quad (\text{družina sistemov NDE})$$

(eksistenčni izrek)

Po eksistenčnem izreku za sisteme NDE

- $\exists \varepsilon > 0$. na $(-\varepsilon, \varepsilon)$. $\exists!$ rešitev $\vec{x}_s: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ za
- ε je neodvisen od s

Torej lahko definiramo $R: J \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(s, t) \mapsto \vec{x}_s(t)$

domena za x

Želeli bi, da bi R bila parametrizacija integralske ploskve.

Če je Γ karakteristična krivulja, tedaj R slike vanjo. Zato R ne določa ploskve. (To se zgodi če izberemo x kot eno od tokovnic).

Torej moramo predpisati pogoje Γ , da bomo res dobili ploskev

Kako $\{R(s,t)\}$ spremenimo v graf funkcije u ?

Odgovor: Imamo $z(s,t)$, želimo bi $z(x,y)$

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \end{cases} \leadsto \begin{cases} s = s(x,y) \\ t = t(x,y) \end{cases} \quad (2) \quad \nearrow$$

Izrek o inverzni funkciji: ← Jacobijeva determinanta

če za nek $s_0 \in I$ velja $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}(s_0,0) \neq 0$,

tedaj rešitev za (2) lokalno obstaja. (v okolici $(s_0,0)$)

Imamo $a, b, c \leftarrow$ enačba

$f, g, h \leftarrow$ začetni pogoji

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}(s_0,0)$ lahko zapisano kot

||

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(s_0,0) & \frac{\partial x}{\partial t}(s_0,0) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(s_0,0) & \frac{\partial y}{\partial t}(s_0,0) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} f'(s_0) & a(p_0) \\ g'(s_0) & b(p_0) \end{vmatrix} = *$$

↑
nerisi si skico za to

$$* \neq 0 \text{ za } p_0 = \gamma(s_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \quad (3)$$

Pogoj (3) pomeni, da sta

- projekcija na $\mathbb{R}^2(x,y)$ tangente $\gamma'(s_0)$ na Γ v točki $p_0 = \gamma(s_0)$.
- projekcija na $\mathbb{R}^2(x,y)$ karakterističnega vektorja $V(p_0)$ linearno neodvisni

Izrek:

Naj bodo $a, b, c \in C^1$

Naj bodo f, g, h komponente γ v $\mathbb{R}^3$.

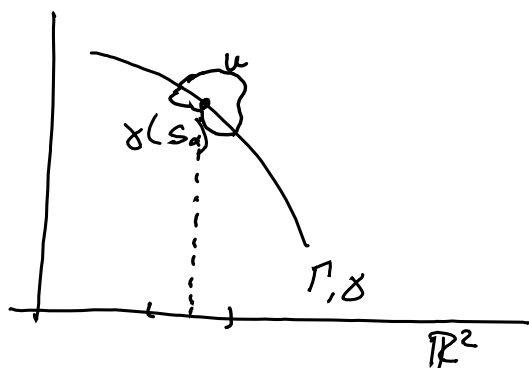
Privzemimo da v $p_0 = \gamma(s_0)$ velja **pogoj transverzelnosti**

$$\begin{vmatrix} f'(s_0) & a(p_0) \\ g'(s_0) & b(p_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f' & a \circ \gamma \\ g' & b \circ \gamma \end{vmatrix}(s_0) \neq 0 \quad (\text{nevezporednost})$$

Torej v neki okolici točke $(x_0, y_0) = (f(s_0), g(s_0)) = \pi_{xy}(p_0)$ pravokotne projekcije na ravnino

$\exists!$ rešitev $u = u(x, y)$ KLE

$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$, ki zadošča pogoju $h(s) = u(f(s), g(s))$ za vs blizu c



Dokaz:

preveriti moramo ^{je} enoličnost

Denimo, da v neki okolici točke p_0 $\exists$ rešitev $w = w(x, y)$ za KLE, za katero je $h = w(f, g)$ za vs blizu s_0 .

Vemo da je $\Gamma_w = \{z = w(x, y)\}$ unija tokovnic.

Toda če gre tokavnica skzi točko $p_0 \in \Gamma_u = \{z = u(x, y)\}$, tedaj je cela vsebovana v Γ_u (dokaži!)

Torej je lokalno $\Gamma_w \subseteq \Gamma_u$ oz. se w, u lokalno ujemata

Primeri:

$$1) u_x + bu_y = 0 \quad \wedge \quad u(x, 0) = h(x); \quad b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

h dana funkcija

Rešitev je $u(x, y) = h(x - \frac{y}{b})$

$$2) \begin{cases} u_x + bu_y = c \\ u(x, 0) = x^2 \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} b, c \in \mathbb{R} \\ b \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

Karakteristične polje $(1, b, c)$

začetna krivulja $\gamma(s) = (s, 0, s^2)$

Enačbe za karakteristične krivulje so

$$x_t = 1 \quad x(s, 0) = s$$

$$y_t = b \quad y(s, 0) = 0$$

$$z_t = c \quad z(s, 0) = s^2$$

$$\text{Dobimo: } x(s, t) = t + c(s) \quad x(s, 0) = s \Rightarrow c(s) = s \\ \Rightarrow x(s, t) = t + s$$

$$y(s, t) = bt + c(s) \Rightarrow y(s, t) = bt$$

$$z(s, t) = ct + c(s) \Rightarrow z(s, t) = ct + s^2$$

Želimo z izraziti z x, y . vsplānem uporabimo izrek o implicitni funkciji. Takrat zaradi enostavnosti to ni potrebno.

$$\Rightarrow s = x - \frac{y}{b} \quad t = \frac{y}{b}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{z = u(x, y) = c \cdot \frac{y}{b} + (x - \frac{y}{b})^2}}$$

Pogoj iz izreka $\left| \begin{matrix} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{matrix} \right| \neq 0$

Primer (Burgensonova enačba)

27.2

$$u \cdot u_x + u_y = 0 \quad u(x, 0) = h(x) \quad h \in C^1$$

Imamo pridruženo karakt. polje $V(x, y, z) = (a, b, c)$

$$V(x, y, z) = (\overset{a}{z}, \overset{b}{1}, \overset{c}{0})$$

Začetna krivulja $\gamma(s) = (\overset{f}{s}, \overset{g}{0}, \overset{h}{h(s)})$

Dobimo enačbe

$$x_t = z \quad x(s, 0) = s \leadsto x_t = h(s) \leadsto x = h(s)t + \psi(s) \leadsto x = h(s)t + s$$

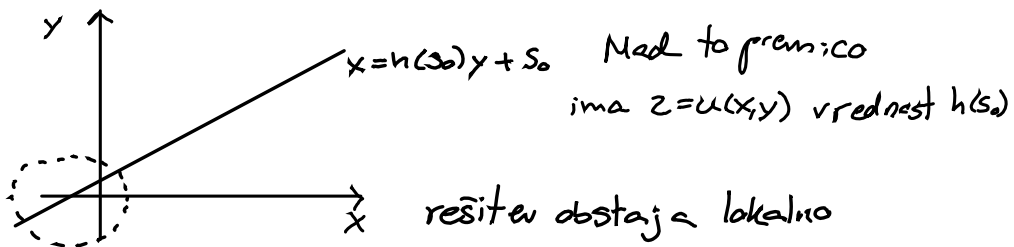
$$y_t = 1 \quad y(s, 0) = 0 \leadsto y = t + \psi(s) \leadsto y = t$$

$$z_t = 0 \quad z(s, 0) = h(s) \leadsto z = c + \psi(s) \leadsto z = h(s)$$

$\underset{z(s, t)}{z(s, t)}$

oziroma $x = h(s)t + s = h(s)y + s$

$$z = h(s)$$



Pogoj iz izreka $p_0 = \gamma(s_0) = (s_0, 0, h(s_0))$

$$\begin{vmatrix} s & a(s_0) \\ 0 & b(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & h(s_0) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Linearna PDE

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y)$$

Tokrat a, b, c, d niso odvisne od u .

Prilagodljive polje je $V = (a, b, cz + d)$

eksplicitno $V = (a(x,y), b(x,y), c(x,y)z + d(x,y))$

Enačbe karakteristik $\begin{cases} \dot{x} = a(x,y) \\ \dot{y} = b(x,y) \end{cases} \text{ sistem za } x, y$

$\dot{z} = c(x,y)z + d(x,y) \leadsto$ lin. en. v z

Primer:

Imejmo Cauchyjevo nalogo:

$$-yu_x + xu_y = u$$

$$u(x,0) = \psi(x)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y & x(s,0) = s \\ \dot{y} = x & y(s,0) = 0 \\ \dot{z} = z & z(s,0) = \psi(s) \end{cases} \leadsto \begin{cases} x(s,t) = A(s)\cos t + B(s)\sin t \\ y(s,t) = A(s)\sin t - B(s)\cos t \end{cases}$$

$$\leadsto \begin{cases} A(s) = s \\ B(s) = 0 \end{cases} \leadsto \begin{cases} x(s,t) = s\cos t \\ y(s,t) = s\sin t \end{cases}$$

$$\leadsto z(s,t) = C(s)e^t = \psi(s)e^t$$

Rezult sistema:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} \quad t = \arctan \frac{y}{x}$$

$$u(x,y) = \psi(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{\arctan \frac{y}{x}}$$

$$\text{Oziroma: } u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \psi(r) e^\varphi$$

$$r \geq 0 \\ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Nelinearne enačbe 1. reda

Imejmo podano funkcijo F z razreda C^1 f odvisno od petih spremenljivk.

Iščemo $u = u(x, y)$ definirano na odp. $mn \subseteq \mathbb{R}^2$ za katero velja $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ (1)

Vpeljemo: $p = u_x$ $q = u_y$

Poskus: privzemimo, da u že obstaja.

Enačbo (1) lahko interpretiramo kot zvezo med točkami (x, y, z) na $\{z = u(x, y)\} = \Gamma_u$ in normalo na Γ_u , torej $(u_x, u_y, -1) = (p, q, -1)$

Označimo družino „potencialnih“ normal τ

$$\vec{n}(\lambda) = (p(\lambda), q(\lambda), -1); \quad \lambda \in \bigwedge_{\text{indeksna množica}} \pi_{\vec{n}_0, \lambda}$$

Ta družina določa družino (potencialnih) tangentnih Π_λ ravnin na iskano ploskev v dani točki (x_0, y_0, z_0)

Enačba vsake take ravnine je

$$\langle \vec{r} - \underbrace{\vec{r}_0}_{(x_0, y_0, z_0)}, \vec{n}(\lambda) \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \quad (2)$$

Definicija: Ogrinjača ravnin Π_λ se imenuje **Mongeov stožec** v točki (x_0, y_0, z_0) (1746 - 1818)

Izkaže se, da enačbo ogrinjače ravnin dobimo tako, da (2) odvojamo še po parametru in jo pridružimo originalni enačbi.

Torej imamo $\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}(\lambda) \rangle = 0$

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}'(\lambda) \rangle = 0$$

Torej mora biti $\vec{r} - \vec{r}_0$ vzporeden $\vec{n}(\lambda) \times \vec{n}'(\lambda)$

$$\vec{n}(\lambda) \times \vec{n}'(\lambda) = \begin{bmatrix} p(\lambda) \\ g(\lambda) \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p'(\lambda) \\ g'(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g'(\lambda) \\ -p'(\lambda) \\ p g' - p' g \end{bmatrix}$$

Če $F(x_0, y_0, z_0, p(\lambda), g(\lambda)) = 0$ odvajamo po λ

dobimo $F_p(x_0, y_0, z_0, p(\lambda), g(\lambda))p' + F_g(x_0, y_0, z_0, p, g)g' = 0$

Sled: $(p', g') \in \mathbb{R}^2$

$$(F_p, F_g) \in \mathbb{R}^2 \quad (p', g') \perp (F_p, F_g)$$

V splošnem v $\mathbb{R}^2$ $(\alpha, \beta) \perp (\beta, -\alpha) \Rightarrow (F_p, F_g) \parallel (g', -p')$

Posledično je $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel (F_p, F_g, p F_p + g F_g)$

S tem smo dobili parametrizacijo Mongueuvega stožca

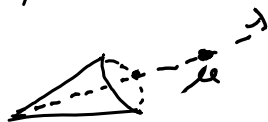
$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \mu(P(\lambda), Q(\lambda), R(\lambda)),$$

kjer je $P(\lambda) = F_p(x_0, y_0, z_0, p(\lambda), g(\lambda))$

$$Q(\lambda) = F_g(\dots)$$

$$R(\lambda) = p(\lambda)P(\lambda) + g(\lambda)Q(\lambda)$$

λ daje premico na plašču, μ daje točko na premici



Denimo, da imamo integ. ploskev

$S = \{z = u(x, y)\}$ za (1). Naj $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Krivulja na S . Tedaj $\gamma(t)$ določa element tang. prost. Zato $\vec{r}_0 + \gamma(t)$ leži v tang. stožcu. Posledično

lahko zahtevamo $\dot{x} = F_p$

$$\dot{y} = F_g$$

$$\dot{z} = pF_p + gF_g$$

$$z(t) = u(x(t), y(t)) \Rightarrow \dot{z} = u_x \dot{x} + u_y \dot{y} = p\dot{x} + g\dot{y}$$

Za enkrat ne vemo kaj sta p in g

Komentar:

$$\text{Pri KLE: } F(x, y, z, p, g) = ap + bg - C$$

$$\Rightarrow F_p = a(x, y, z)$$

$$F_g = b(x, y, z)$$

$$pF_p + gF_g = ap + bg \stackrel{F=0}{=} C$$

Torej

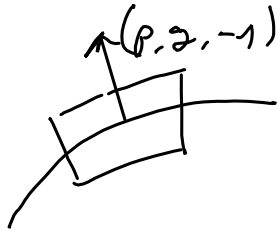
$$x_+ = a$$

$$y_+ = b$$

$$z_+ = C$$

11.3

Ker p, g ne poznamo ju $\mathbb{R}$ smiselno
 obravnavati kot spremenljivki $p = p(x, y), g = g(x, y)$
 in $F(x, y, u, p(x, y), g(x, y)) = 0$



enačba ravnine

$$\langle (\xi, \eta, \zeta) - (x, y, z), (p, g, -1) \rangle = 0$$

Trditev:

če krivulja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ zadošča pogojem
 $\dot{z} = p\dot{x} + g\dot{y}$, tedaj je tangenta na družino
krivulj in ravnino skozi njene točke,
dobimo s p, g, r

Dokaz:

$$\begin{aligned}\langle (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), (p, g, -1) \rangle &= \langle (\dot{x}, \dot{y}, p\dot{x} + g\dot{y}), (p, g, -1) \rangle \\ &= \dots = 0\end{aligned}$$



Zvezo $F(x, y, u, p, z) = 0$ odvajamo po x, y ,
dobimo:

$$F_x \cdot 1 + F_y \cdot 0 + F_u \cdot u_x + F_p p_x + F_z z_x = 0$$

$$F_x \cdot 0 + F_y \cdot 1 + F_u \cdot u_x + F_p p_y + F_z z_y = 0$$

Vzdelaj $p = p(x(t), y(t))$, $g = g(\dots)$ velja se

$$\dot{p} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} = F_p p_x + F_z p_y$$

$$\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = F_p z_x + F_z z_y$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= (-F_x - F_u u_x - F_z z_x) + F_z p_y \\ &= F_z (p_y - z_x) - (F_x + F_u u_x) \end{aligned}$$

Pričakujemo $p_y - z_x = (u_x)_y - (u_y)_x = 0$

Torej dobimo enačbo za p

$$\dot{p} = -(F_x + F_u \cdot p)$$

Podobno: $\dot{z} = -(F_y + F_u z)$

Dobili smo karakteristični sistem:

$$x_t = F_p$$

$$y_t = F_g$$

(2)

$$z_t = p F_p + g F_g$$

$$p_t = -(F_x + F_z p)$$

$$g_t = -(F_y + F_z g)$$

Rešitve (x, y, z, p, g) kot funkcije t -ja
sistema se imenujejo **karakteristike** PDE

Trditev:

Funkcija F je konstantna vzdolž vsake rešitve sistema (2)

Dokaz:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} F(x, y, z, p, q) &= F_x x' + F_y y' + F_z z' + F_p p' + F_q q' \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_z (p F_p + q F_q) \\ &\quad - F_p (F_x + p F_z) - F_q (F_y + q F_z) = 0\end{aligned}$$

↑
vse se pokrajša



Cauchyjeva naloga za PDE 1. reda

Naj bo $\gamma = \gamma(t) = (\underbrace{x, y, z}_{\gamma \dots \text{sled karakteristike}}, p, q)(t)$ karakteristika

Velja: γ je odvisen od zač. pogoja $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$

Definicija: krivulja $(x, y, z, p, q)(s)$, ki zadošča enačbi $F(x, y, z, p, q)(s) \equiv C$, se imenuje integralna krivulja

Cauchyjev problem za PDE $F(x, y, z, p, q) = 0$

sestavlja:

- enačba

- začetni pogoj

integralna ploskev $\{z = u(x, y)\}$

nej vsebuje dano krivuljo

$$\gamma(s) = (p(s), q(s), h(s))$$

Imamo 5 enačb $F(x, y, z, p, q) = 0$ in 3 pogoje.

Iščemo **smiselni** funkciji Φ in Ψ , da b

(f, g, h, Φ, Ψ) začetni pogoj za naš sistem.

Če sistem s temi začetnimi pogoji rešimo, dobimo funkcijo

$$R(s, t) = (x(s, t), y(s, t), \dots, z(s, t))$$

za katero velja:

- $R(s, 0) = (f, g, h, \Phi, \Psi)(s)$
- projekcija R na $\mathbb{R}^3(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R})$ lokalno parametrizira integrabilno ploskev $\{z = u(x, y)\}$ za našo enačbo

Kaj pomeni **smiselni** funkciji?

- če u reši NLE in $z = u(x, y)$, $p = u_x$, $q = u_y$ potem velja $F(x, y, z, p, q) = 0$
Sledi $F(R(s, t)) = 0$

$$\text{Dovolj: } F(R(s, 0)) = 0$$

↑ ker je F vzdolž takovnic konstantna

$$\text{oziroma } F(f, g, h, \Phi, \Psi)(s) = 0 \text{ za } \forall s$$

- če naj bo $z = u(x, y)$, tedaj mora na ploskvi $\Sigma = \{R(s, t)\}$ veljati:

$$z_t = u_x x_t + u_y y_t$$

$$z_s = u_x x_s + u_y y_s$$

Torej, če naj bo $p = u_x$, $q = u_y$ moramo zahtevati, da je $z_s = p x_s + q y_s$, $z_t = p x_t + q y_t$
V posebnem, za $t = 0$ dobimo

$$x(s, 0) = f(s)$$

$$y(s, 0) = g(s)$$

$$(3) \quad z = h(s) \quad h'(s) = \Phi(s)f'(s) + \Psi(s)g'(s)$$

$$p = \Phi(s)$$

$$q = \Psi(s)$$

zapišimo (3) v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} z_s \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ g \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\quad}_{A = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}} \text{ Jakobijeva matrika}$$

Če je $\det A \neq 0$ lahko pišemo (lokalno)

$s = s(x,y)$, $t = t(x,y)$ (izrek o impl. funk.)

Sledi:

$$\begin{bmatrix} p \\ g \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} z_s \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & t_x \\ s_y & t_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s \\ z_t \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} z_s s_x + z_t t_x \\ z_s s_y + z_t t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}$$

Torej za $u := z \circ (s,t)$ oz $u(x,y) = z(s(x,y), t(x,y))$

velja:

$$u_x = p$$

$$u_y = g$$

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

Komentar k pogoju $\det A \neq 0$:

Ta pogoj je odprt

$$N \triangleq \gamma \text{ imamo } x = x(s, 0) = f(s) \\ x_s(s, 0) = f'(s)$$

podobno za y in g

$$\text{Za } \forall s \text{ naj velja } x_+(s, 0) = F_p(\Gamma(s)) \\ y_+(s, 0) = F_2(\Gamma(s))$$

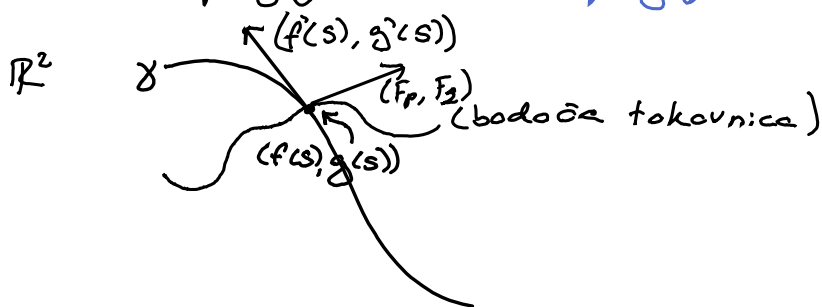
$$\Gamma(s) = (\underbrace{f, g, h}_{\gamma(s)}, \Phi, \psi)(s)$$

Torej za $\det A \neq 0$ zadošča (lokalno)

$$\begin{vmatrix} f' & g' \\ F_p \circ \Gamma & F_2 \circ \Gamma \end{vmatrix} \neq 0$$

Geometrično: Imamo projekciji na $\mathbb{R}^2$
integralne krivulje $\Gamma = (f, g, h, \Phi, \psi)$ in
tokovnice (x, y, z, p, q) karakterističnega
polja $F_p, F_g, pF_p, qF_g, -(F_x + F_z p), -(F_y + F_z q)$.
V presečiščih $(s, 0)$ nista vzporedni

Zato pogoju rečemo **pogoj transvezalnosti**



Povzetek: Začetne pogoje za Cauchyjevo nalogo dobimo tako, da ob dani krivulji $\gamma(s) = (f(s), g(s), h(s))$ poiščemo še $p = \Phi(s)$, $q = \psi(s)$ da bo za $\Gamma = (f, g, h, \Phi, \psi)$ veljalo

- $F(\Gamma(s)) = 0$
- $h' = \Phi f' + \psi g'$
- $\begin{vmatrix} f' & g' \\ F_p(\Gamma) & F_2(\Gamma) \end{vmatrix} \neq 0$

To je dovolj pogojev za enoličnost Φ in ψ

Za $\forall s > 0$ rešimo

$$\left. \begin{aligned} x_t &= F_p \\ y_t &= F_g \\ z_t &= pF_p + gF_g \\ p_t &= -(F_x - pF_z) \\ q_t &= -(F_y - qF_z) \end{aligned} \right\} *$$

$$\begin{aligned} h' &= \Phi p' + \Psi g' \\ (ZP) \quad & \begin{vmatrix} p' & g' \\ F_p(s) & F_g(s) \end{vmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

Po eksistenčnem izreku dobimo

$R(s, t) = (x(s, t), \dots)$ vsebuje:

- $R(s, 0) = (f, g, h, \Phi, \Psi)(s)$
- Projekcija R na $\mathbb{R}^3 = (x, y, z)(s, t)$ je lokalno graf $\{z = u(x, y)\}$ neke funkcije u

pričakujemo: u reši PDE $F(x, y, z, u_x, u_y)$

Dokazi:

Preverimo da $z = u(x, y)$ reši sistem

$$\begin{cases} z_s = p x_s + q y_s \\ z_t = p x_t + q y_t \end{cases} (s)$$

Na $\Sigma = \{R(s, t)\}$ je $F \equiv 0$, torej zadošča preveriti da je $p = u_x$ in $q = u_y$

Vemo: je (s) ekvivalentno

$$\begin{bmatrix} z_s \\ z_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{bmatrix}$$

Hkrati je $\begin{bmatrix} z_s \\ z_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$ (po verzižnem pravilu)

Ker je A obrnljiva bo sledilo $\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$

A je obrnljiva, če (s) velja

1)

$B(s, t) := z_s - p x_s - q y_s$ želimo $B \equiv 0$

$$B(s, 0) = h'(s) - \Phi(s)p'(s) - \Psi(s)g'(s) = 0$$

ker $h' = \Phi p' + \Psi g'$ (začetni pogoj)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B(s, t) &= z_{st} - p_t x_s - p x_{st} - q_t y_s - q y_{st} = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (\underbrace{z_t - p x_t - q y_t}_{po * = 0}) + \underbrace{p_s x_t + q_s y_t}_{-p_t x_s - q_t y_s} = \end{aligned}$$

$$= \underbrace{F_p p_s + F_g g_s}_{(F \circ R)_s} + \underbrace{(F_x + p F_z)}_{=0, \text{ ker } F(s) \equiv 0} x_s + \underbrace{(F_y + q F_z)}_{=0, \text{ ker } F(s) \equiv 0} y_s$$

$$\underbrace{(F \circ R)_s - F_z \cdot z_s}_{=0, \text{ ker } F(s) \equiv 0} + F_z (p x_s + q y_s)$$

$$= -F_z (z_s - p x_s - q y_s) \quad \text{Dobili smo:} \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -F_z \cdot B$$

Označimo $b(t) := b_s(t) := B(s, t)$

Dokazali smo $b' = c \cdot b$, kjer je $c(t) = c_s(t) = -F_z(R(s, t))$

$$\text{Sledi (iz Analize 3):} \quad b(t) = b(0) e^{\int_0^t c(\tau) d\tau}$$

Velja: $b(0) = B(s, 0) = 0$

Zato je $b(t) = b_s(t) = B(s, t) = 0 \quad \forall s, t$

2) $z_t = p x_t + q y_t \quad \checkmark \quad po *$

Naj bo

- $F = F(x, y, z, p, q)$ dana C^2 funkcija na odprti podmnožici $\mathbb{R}^2$

- $\gamma = (f, g, h): I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dana C^1 krivulja

- $\phi, \psi \in C^1$

- Na neki okoliščini točke $s_0 \in I$ velja pogoj (zD)

Torej $\exists \varepsilon > 0$. Na krogu: $K = K((s_0, 0), \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$.

$\exists!$ $R = R(s, t) = (x(s, t), \dots, z(s, t))$ da velja:

a) $R(\cdot, 0) = \Gamma$ za $|s - s_0| < \varepsilon$ in $\Gamma = (f, g, h, \phi, \psi)$

b) $F \circ R = 0$ na K

c) za $\forall s \in K(s_0, \varepsilon)$. funkcija $R(s, \cdot)$ reši
karak. sistem

d) proj. $[(\pi_{x,y,z})R](s, t) = (x(s, t), y, z)$

določa parameter gladke integ. ploskve
 $\{z = u(x, y)\}$ za $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$

Linearni; diferencijalni; operatorji 2. reda

18.3
(seksida)

Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ območje in

$$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n)$$

Naj bo $\mathcal{C}^2(\Omega)$

PDC II reda in $\mathcal{C}^2(\Omega)$ je preslika

$$L: \mathcal{C}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}(\Omega)$$

$$u \mapsto L(u)$$

$$L(u) = \underbrace{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}}_{\text{glavni del operatorja } L} + \sum_{k=1}^n b_k(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x_1, \dots, x_n)$$

Cilj: reševanje enačb oblike

$$L(u) = g, \text{ kjer je } g \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Dve spremenljivki

$$\underbrace{a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy}}_{\text{glavni del}} + d u_x + e u_y + f u = g$$

$$a, b, c, d, e, f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Klasifikacija

PDO klasificiramo glede na glavni del

Zapis $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$ nes spomni:
na kvadratne forme

$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ lahko zapišemo v obliki

$$(\xi, \eta) \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

M

Matrika M ima lastne vrednosti λ_1, λ_2

M je:

1) **Elipitična**, če je $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

torej $-\det(M) = -\lambda_1 \lambda_2 = b^2 - ac = \mathcal{D} < 0$

2) **Hiperbolična**, če je $\mathcal{D}(M) > 0$

3) **Parabolična**, če je $\mathcal{D}(M) = 0$

Od tod poimenovanje PDO je $L = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

1) eliptičen na Ω , če je $\mathcal{D}(x, y) < 0$ na Ω

2) hiperboličen na Ω , če je $\mathcal{D}(x, y) > 0$ na Ω

3) paraboličen na Ω , če je $\mathcal{D}(x, y) = 0$ na Ω

Primeri:

1) Najpomembnejši eliptični operator je

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$\Delta u = g \quad \text{Laplaceova enačba}$$

2) Najpomembnejši hiperbolični operator

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = g \quad \text{valovna enačba}$$

3) Najpomembnejši parabolčni operator

$$u_t - k u_{xx} = g \quad \text{toplotna enačba}$$

Neodvisnost tipa od koordinat

Vpeljimo na Ω novi koordinati ξ in η s predpisom $\xi(x,y), \eta(x,y)$, torej preslikave $x,y \mapsto \xi, \eta$ je difeomorfizem $\Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$

Naj bo $u(x,y)$ in naj bo $w(\xi, \eta)$ podana z $u(x,y) = w(\xi(x,y), \eta(x,y))$

$$u_x = w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x$$

$$u_y = w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = w_{\xi\xi}(\xi_x + \eta_x)\xi_x + w_{\xi\xi}\xi_{xx} + w_{\xi\eta}(\xi_x + \eta_x)\eta_x + w_{\eta\xi}\eta_{xx} + w_{\eta\eta}(2\xi_x\eta_x + \xi_x\xi_x + \eta_x\eta_x)$$

$$u_{xy} = w_{\xi\xi}(\xi_y + \eta_y)\xi_x + w_{\xi\eta}(\xi_y\xi_x + \eta_y\xi_x + \eta_y\eta_x + \xi_y\eta_x) + w_{\eta\xi}(\xi_y + \eta_y)\eta_x + w_{\eta\eta}\xi_y\eta_x + w_{\eta\eta}\eta_{xy}$$

$$u_{yy} = \dots$$

Vstavimo v $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$ in dobimo

$$l(w) = Aw_{\xi\xi} + 2Bw_{\xi\eta} + Cw_{\eta\eta} \quad \text{kjer so}$$

$$A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2$$

$$B = a\xi_x\eta_y + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y$$

$$C = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2$$

$$\text{Opazimo } \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix}$$

"
Jac(ϕ), kjer je ϕ prehodna
matrika za $x,y \mapsto \xi, \eta$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(\text{Jac}(\phi)) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \det(\text{Jac}(\phi)) = \\ = \underbrace{\det(\text{Jac}(\phi))^2}_{\text{ne spremeni predznaka}} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}_\ell = \mathcal{J}_\ell \cdot a^2 \Rightarrow \text{ohrani se tip}$$

kanonične oblike PDO 2. reda

Izkaže se, da za vsake tip PDO 2. reda lahko najdemo koordinate na se v kateri bo glavni del tako enostaven kot se le da

Kanonične oblike so

TIP	glavni del KANONICNE OBLIKE
hiperbolioni	$w_{\bar{z}}\eta$
parabolioni	$w_{\bar{z}}\bar{z}$
eliptioni	$w_{\bar{z}}\bar{z} + w_{\eta}\eta$

Izreki:

Naj bo $L(u) = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \dots = g$ hiperboličnega tipa na Ω . Potem obstajata taki koordinati ξ, η na $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$, da se bo v teh koordinatah zgornja enačba glasila

$$w_{\xi\eta} + l_1(w) = \tilde{g}$$

$\nwarrow$ reda 1

Dokaz:

Naj bo $w(\xi(x,y), \eta(x,y)) = u(x,y)$ in za

$l(w) = A(\xi, \eta)w_{\xi\xi} + 2Bw_{\xi\eta} + Cw_{\eta\eta}$ mora veljati $A=C=0$.

Torej:

$$A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0$$

$$C = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2$$

Iščemo ξ, η .

Delimo z ξ_y^2 oz. η_y^2

$$a \cdot \left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 2b \frac{\xi_x}{\xi_y} + c = 0 \quad \text{razcepimo}$$

$$\text{ali: } \xi_x + \frac{1}{a}(b - \sqrt{b^2 - ac})\xi_y = 0$$

$$\eta_x + \frac{1}{a}(b + \sqrt{b^2 - ac})\eta_y = 0$$

$\nwarrow$ ne vem zakaj je enkrat +, enkrat pa -

Ali bo za rešitvi veljalo $\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$? Ja

$$\langle (a, b - \sqrt{b^2 - ac}), (\xi_x, \xi_y) \rangle = 0$$

$$\langle (a, b + \sqrt{b^2 - ac}), (\eta_x, \eta_y) \rangle = 0$$

nekolinearna $\implies$ pravokotnost $\implies$ nekolinearna

Rešujemo tretjo enačbo oblike

$$a\xi_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\xi_y = 0$$

linearna prvega reda $\Rightarrow$ rešujemo s karakterističnim sistemom

$$x_t = a$$

$$y_t = b + \sqrt{b^2 - ac} \quad \Rightarrow \text{Dobimo } \frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$z_t = 0$$

$$\Rightarrow y = y(x; c)$$

$\Rightarrow$ razrešimo na C

$$C(x, y(x)) \equiv C$$

Torej za $\xi(x,y)$ lahko vzamemo $C(x,y)$

Tako dobimo $\xi(x,y)$ in podobno še

dobimo $\eta(x,y)$

Primer:

Valovni operator: $L(u) = u_{tt} - c^2 u_{xx}$

$$\dot{x} = \pm c$$

$$\dot{t} = 1$$

$$\dot{z} = 0$$

dobimo iz $b \pm \sqrt{b^2 - ac}$

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \Rightarrow x = \pm ct + D$$

namesto
D damo
 z oz η

$$z(t, x) = x - ct$$

$$\eta(t, x) = x + ct$$

Izrek:

Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ povezana odprta množica
 $a, b, c \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. $w_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$

L naj bo parabolichen v okolici w_0

$(Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy})$ označimo $f(x, y) = x$

Torej obstaja okolica U točke w_0 in

obstaja $g \in \mathcal{C}^1(U)$, z lastnostmi:

- (f, g) določa difeomorfizem na svojo sliko

- $(\xi, \eta) = (f(x, y), g(x, y)) = (x, g(x, y))$

določata tak koordinatni sistem, da

ima operator $Lw := Aw_{\xi\xi} + 2Bw_{\xi\eta} + Cw_{\eta\eta}$,

kjer so $A = af_x^2 + 2bf_xf_y + cf_y^2$

$B = af_xg_x + b(f_xg_y + f_yg_x) + cf_yg_y$

$C = ag_x^2 + 2bg_xg_y + cg_y^2$,

oblike

$Lw = Aw_{\xi\xi}$

kjer je $A = A(\xi, \eta)$

Dokaz: $\Rightarrow$

Dokaz

$$\left. \begin{array}{l} \text{Privzelo smo } |a|+|b|+|c|>0 \\ \text{paraboličnost: } ac-b^2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow |a(\omega_0)|+|c(\omega_0)|>0$$

$\Rightarrow$ simetrija $a(\omega_0) \neq 0$

Zahtevamo: $B=C=0$

Da volj: $C=0$ (ker se tip enačbe dranja pri menjavi koordinat)

To pomeni $0 = ag_x^2 + 2bg_xg_y + cg_y^2 \quad (=C)$
 $= \frac{1}{2} (ag_x + bg_y)^2$
 $\uparrow$ paraboličnost (četrkotnik) $\Rightarrow \frac{b^2}{a} = C$

Torej rešujemo: $ag_x + bg_y = 0$

Ovinek $\Rightarrow$

Imejmo enačbo $au_x + bu_y = 0$ (3)

„rešitev“: $G(x, y, C) = 0 \Rightarrow$ izrazimo $C = C(x, y)$

Karakteristični sistem

$$\dot{x} = a(x, y)$$

$$\dot{y} = b(x, y)$$

$$\dot{z} = 0$$

Iščemo $z = u(x, y)$

Sistem nam pove, da je u konstantna vzdolž rešitev reducirane sistema $\dot{x} = a \quad \dot{y} = b$ (4)

Enačbi (4) poskusimo dodeliti $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} \stackrel{?}{=} \frac{dy}{dx}$

To pomeni $F(x, y) = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$, tedaj rešujemo enačbo $h'(x) = F(x, h'(x))$ (5)

Ideja: u naj bo prvi integral za (5)

Vmesni izvek $\gg \gg$

$$ag_x + bg_y = 0$$

Zdaj vemo, da za g lahko vzamemo 1. integral enačbe $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}(x, y)$ (6)

Preverimo: $J(f, g) \neq 0$

$$J(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = g_y \quad (P(x, y) = x)$$

če je $g_y = 0 \Rightarrow (a \neq 0 \wedge ag_x + bg_y = 0 \Rightarrow g_x = 0)$

Torej $\nabla g = 0$, kar ni mogoče, ker je g netrivialen 1. integral

Ovinek:

Prvi integral:

Imejmo enačbo $h'(x) = F(x, h(x))$

Vemo iz ana 3: Funkcija $\Phi = \Phi(x, y)$ se imenuje prvi integral za (2), če je konst. vzdolž grafa rešitve

Matematično je

$\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ je prvi integral za (2), če za

$\forall h: I \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadošča

• $I_h \subset U$

• (2) velja za $\forall x \in I$,

velja $\Phi(x, h(x)) = \text{const}$

Prvi integral je netrivialen, če je reda C^1 in $\nabla \Phi \neq 0$
Izrek iz ana 3:

$x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ a $b, > 0$ $Q = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$

$F: Q \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in Lipschitzova v y

Tedenj $\exists$ dolica U (x_0, y_0) in $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}$

Vmešni izrek:

Izrek: Naj bosta $a = a(x, y)$ $b = b(x, y)$ zvezno

parcialno odvedljivi na $U \subseteq \mathbb{R}^2$ in $a \neq 0$

označimo $F := \frac{b}{a}$. Naj bo $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}$

prvi integral za $y' = F(x, y)$ na U

Tedaj Φ reši diferencialno enačbo $ax + by = 0$

Dokaz: Označimo $\omega_0 = (x_0, y_0)$. Po obstojnem

izreku $\exists$ interval J dole x_0 , ter $\exists!$ $h: J \rightarrow \mathbb{R}$, ki

reši Cauchyjev problem $h'(x) = F(x, h(x))$

$$h(x_0) = y_0$$

Ker je Φ prvi integral za $y' = F(x, y)$ velja

$$\Phi(x, h(x)) \equiv \text{const. na } J$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \Phi(x, h(x)) = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \text{const}$$

$$0 = \Phi_x(x_0, h(x_0)) \cdot 1 + \Phi_y(x_0, h(x_0)) h'(x_0) =$$

$$= \Phi_x(x_0, h(x_0)) + F(x_0, h(x_0)) \cdot \Phi_y(x_0, h(x_0)) =$$

$$= \underbrace{\left(\Phi_x + \underbrace{F \Phi_y}_{\substack{\frac{b}{a} \cdot \underbrace{\Phi_y}_{y_0}}} \right)}_{\omega_0} (x_0, h(x_0)) \quad / \cdot a(\omega_0)$$

$$(a\Phi_x + b\Phi_y)(\omega_0) = 0$$



Primer

$$Lu = \underbrace{x^2}_{a} u_{xx} + \underbrace{2xy}_{b} u_{xy} + \underbrace{y^2}_{c} u_{yy}$$

je paraboloidni operator ($b^2 = ac$)

$$|a| + |b| + |c| > 0 \text{ na } \{x \neq 0\} \cup \{y=0\} = \mathbb{R}^2 - \{0\} = \mathcal{D}$$

Na $\{x \neq 0\}$ se jednačina (6) glasi $y' = \frac{y}{x}$,

ko ima rešitve $y = Cx$, zato uzimamo

$$C = \frac{y}{x} \text{ i u zamenu } g(x, y) = \frac{y}{x}$$

velja: $(\xi, \eta) := (x, \frac{y}{x})$ i u za

$$u(x, y) = w(\xi, \eta) = w(x, \frac{y}{x}) \text{ dobijemo}$$

$$u_x = w_\xi - \frac{y}{x^2} w_\eta$$

$$u_y = \frac{1}{x} w_\eta$$

$$u_x = w_x - \frac{y}{x^2} w_\eta$$

$$u_y = \frac{1}{x} w_\eta$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Odwodi 2. reda

$$\begin{aligned} u_{xx} &= w_{\xi\xi} - \frac{\eta}{\xi^2} w_{\xi\eta} + \frac{\eta}{\xi^2} w_\eta - \frac{\eta}{\xi^2} w_\eta \eta \\ &= w_{\xi\xi} - \frac{2\eta}{\xi^2} w_{\xi\eta} + \frac{\eta^2}{\xi^2} w_{\xi\xi} + \frac{2\eta}{\xi^2} w_\eta \end{aligned}$$

$$u_{xy} = \dots$$

$$\text{Ustavimo u } Lu \text{ dobijemo } Lu = \xi^2 w_{\xi\xi}$$

Elipitični primer

30.3.

Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Pravimo da je f **realno analitična** na Ω ,

če za $\forall \omega_0 = (x_0, y_0) \in \Omega. \exists \delta > 0. \exists (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ realno
zaporedje, $K(\omega_0, \delta) \subset \Omega$ in $(x, y) \in K(\omega_0, \delta)$

$\Rightarrow f$ lahko razvijemo v vrsto

$$f(x, y) = \sum_{j, k} a_{jk} (x - x_0)^j (y - y_0)^k$$

Oznaka: $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega)$

Izrek:

Imejmo odprto množico $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ in $a, b, c \in C^\omega(\Omega)$

Vzamemo $\omega_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Naj bo operator

$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$ eliptičen na ω_0

Torej $\exists$ okolica $U \ni \omega_0 \subset \Omega$ in realno analitični funkciji f, g , tako da velja:

1. par (f, g) določa difeomorfizem na svojo sliko.

2. $(\xi, \eta) = (f(x, y), g(x, y))$ določata taki

koordinati, da ima operator $\mathcal{L}$

obliko $\mathcal{L}w = A(w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta}) = A \Delta_{(\xi, \eta)} w$

$$(\mathcal{L}w = Aw_{\xi\xi} + 2Bw_{\xi\eta} + Cw_{\eta\eta})$$

Dokaz: Želimo: $A = C$, $B = 0$

ozirame $A - C + 2iB = 0$. Pišemo $\Phi := f + ig$

$$\begin{aligned} A - C + 2iB &= \underbrace{(af_x^2 + 2bf_xf_y + cf_y^2)}_A - \underbrace{(ag_x^2 + 2bg_xg_y + cg_y^2)}_C \\ &\quad + 2i \underbrace{(af_xg_x + b(f_xg_y + f_yg_x) + cf_yg_y)}_B = \\ &= a(f_x^2 - g_x^2 + 2if_xg_x) + 2b(f_xf_y - g_xg_y + i(f_xg_y + f_yg_x)) \\ &\quad + c(f_y^2 - g_y^2 + 2if_yg_y) = \\ &= a\Phi_x^2 + 2b\Phi_x\Phi_y + c\Phi_y^2 \end{aligned}$$

$$\text{Imamo enačbo } a\Phi_x^2 + 2b\Phi_x\Phi_y + c\Phi_y^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Eliptičnost: } \mathcal{J} = b^2 - ac < 0$$

$$\text{V posebnem: } ac > 0$$

$$\text{Oznaka } K := \sqrt{|\mathcal{J}|} = \sqrt{|b^2 - ac|}$$

en. (1) zapišemo kot (ker je $a \neq 0$, zato se izide)

$$(a\Phi_x + (b + iK)\Phi_y)(a\Phi_x + (b - iK)\Phi_y) = 0$$

$\Rightarrow$ dovolj je, če rešimo enačbo

$$a\Phi_x + (b \pm iK)\Phi_y = 0$$

Opazimo: Φ reši $a\Phi_x + (b + iK)\Phi_y = 0$, torej

s konjugiranjem dobimo $a\bar{\Phi}_x + (b - iK)\bar{\Phi}_y = 0$

(ker so a, b, c realne), torej

$\bar{\Phi}$ reši enačbo $a\eta_x + (b + iK)\eta_y = 0$

Torej to pomeni, da zadošča reševati enačbo (2)

$$a\Phi_x + (b + iK)\Phi_y = 0 \quad (2)$$

Karakteristični sistem ...?

- Naj prej poskusimo formalno (zastavimo idejo)
- Nadaljujemo z rigoroznim dokazom.

$\Rightarrow$

Recimo, da lahko enačbi (2) priredimo karakteristični sistem.

$$\dot{x} = a(x, y)$$

$$\dot{y} = (b + ik)(x, y)$$

$$\dot{z} = 0$$

pričakujemo rezo oblike $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{b+ik}{a} := F$
 iščemo $y = h(x)$, tako da bo $h'(x) = F(x, h(x))$ in
 $\oint$ bo integral za enačbo $\rightarrow$

„kompleksifikacija F “: (razširimo na $\mathbb{C}$)

F kompleksna $\Rightarrow h$ kompleksna $\Rightarrow F$ mora
 slikati iz $\mathbb{C}^2$

kako to naredimo? $F(z, w) = ?$

Vemo: $\mathcal{C}^\omega$ je invarianten za osnovne operacije
 na funkcijah: $+, -, \cdot, : , \dots$

$$\Rightarrow (a, b, c \in \mathcal{C}^\omega \Rightarrow F_1 = \operatorname{Re} F \in \mathcal{C}^\omega, F_2 = \operatorname{Im} F \in \mathcal{C}^\omega)$$

$\Rightarrow$ torej smemo Taylorjevo vrsto za F razširiti na $\mathbb{C}^2$

To pomeni: pišimo za (x, y) iz neke okolice (x_0, y_0)

$$F_{1,2}(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} b_{j,k}(x-x_0)(y-y_0)^k \quad y = (b+ik)(x, y)$$

$\wedge$ za 1 in za 2 lahko to naredimo

Za $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, ki so dovolj blizu (x_0, y_0) definiramo

$$F_{1,2}(z, w) := \sum_{j,k=0}^{\infty} b_{j,k}(z-x_0)(w-y_0)^k$$

To definira neko enolično funkcijo v ok. $(x_0, y_0) \cup \mathbb{C}^2$

$\Rightarrow$

Naša razširitev $F: F = F_1 + F_2$ holomorfna funkcija dveh kompleksnih spremenljivk.

Naj bo Φ netrivialen 1. integral za $h'(z) = F(z, h(z))$. (3) To pomeni, da ob dani točki $= w_0 = (z_0, w_0) \in U \ni w_0 \in \mathbb{C}^2$ in holomorfni funkciji $\Phi = \Phi(z, w)$, del na U velja za vsake rešitve h enačbe (3) na okolici z_0 velja $\Phi(z, h(z)) \equiv \text{const}$

Obstoj: Varianta dokaza za realni del (D.N)

Prišli smo do kandidata za rešitev Φ za (2)
Moramo preveriti da je res rešitev.

$$(2) a\Phi_x + (b+ik)\Phi_y = 0$$

Označimo $w_1 = (x_1, y_1) \in U$

Velja kompleksna različica eksistenčnega izreka če je $F = F(z, w)$ holomorfna funkcija dveh kompleksnih spremenljivk, tedaj ima Cauchyjev problem $h'(z) = F(z, h(z))$ $h(z_1) = w_1$ na neki okolici točke $z_1 \in \mathbb{C}$ natanko 1 holom. rešitev.

Vzememo: $z_1 = x_1$ $w_1 = y_1 \leadsto h$

Sedaj $\Phi(z, h(z)) \equiv c$ odvajamo in vstavimo $z = z_1$

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_z(z_1, h(z_1)) + \Phi_w(z_1, h(z_1)) \cdot h'(z_1) \\ &= \Phi_z(z_1, h(z_1)) + \Phi_w(z_1, h(z_1)) \cdot F(z_1, h(z_1)) \\ &= (\Phi_z + F \cdot \Phi_w)(z_1, h(z_1)) \quad / a(w_1) \\ &\quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{w_1} \end{aligned}$$

$$0 = (a\Phi_z + (b+ik)\Phi_w)w_1$$

$$\stackrel{DN}{\Rightarrow} (a\Phi_x + (b+ik)\Phi_y)(x_1, y_1) = 0$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{poljubni element } U}$

Funkcijska neodvisnost?

Φ holomorfna $\Rightarrow (f, g) \in (CR)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J(f, g) &= \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = f_x g_y - f_y g_x = \\ &= f_x^2 + f_y^2 = f_x^2 + g_x^2 = |Df|^2 = d_x \Phi^2 = \underbrace{|\Phi'|^2}_{\neq 0} \end{aligned}$$

(ker je Φ netrivialen)

$$"f = z, g = \bar{z}"$$

Primer: Euler-Tricomi operator

$$Lu = u_{xx} + x u_{yy}$$

je element na $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$

Dobimo $F(u, v) = ; \sqrt{u}$

$$h'(x) = i\sqrt{x}$$

$$h(x) = \frac{2}{3} i x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\Rightarrow \Phi(x, y) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + iy$$

$$\xi = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = y$$

$\vdots$

$$\mathcal{L}w(\xi, \eta) = \underbrace{\left(\frac{3}{2}\xi\right)^{\frac{2}{3}}}_A (w_{\xi\xi} + v_{\eta\eta})$$

Valovna enačba na realni osi

1.4

Imejmo $c > 0$. Obravnavamo enačbo

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$x \in (a, b) \subseteq [-\infty, \infty]$$

$$t \in (0, \infty)$$

$u(x, t)$... lega delca
na x ob času t

To je valovna enačba na realni osi.

To je LDE 2. reda z $\mathcal{D} = 0 - c^2 \cdot 1 \cdot (-1) = c^2 > 0$

$\Rightarrow$ to je hiperbolična LDE

Kanonizirana oblika: $w_{\xi\eta} = 0$, *

ly4 ξ in η Dobimo iz rešitev sistemov

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} t_s = 1 \quad (=a) \\ x_s = c \quad (=b + \sqrt{b^2 - ac}) \\ \xi_s = 0 \end{array} & \begin{array}{l} t_s = 1 \quad (=a) \\ x_s = -c \quad (=b - \sqrt{b^2 - ac}) \\ \eta_s = 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1. \text{ sistem} \quad \left. \begin{array}{l} t = s + d_1 \\ x = cs + d_2 \\ \xi = d_3 \end{array} \right\} x - ct = \text{const} \end{array}$$

$\Rightarrow$ vzamemo $\xi = x - ct$ $\eta = x + ct$ (iz 2. sistema)

$$* \Rightarrow w(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

$$\text{Hkrati je } u(x, t) = w(\xi(x, t), \eta(x, t))$$

$$\Rightarrow u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad \text{z nedi } F, G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

Preizkus:

$$u_t = -F'(x - ct) \cdot (-c) + G'(x + ct) \cdot c$$

$$u_{tt} = F''(x - ct) c^2 + G''(x + ct) c^2$$

$$u_x = F' + G'$$

$$u_{xx} = F'' + G''$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2(F'' + G'') - c^2(F'' + G'') = 0 \quad \checkmark$$

Cauchyjev problem za valovna enačbo

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

Iščemo zvezno funkcijo $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ki bo zadoščala Cauchyjevemu problemu ob danih zveznih $\mathcal{C}^2$ f, g . (Zahtevamo, da je $u \in \mathcal{C}^2$ na odprtem območju)

Reševanje:

- začnemo z nastavitvijo $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$
(iščemo funkciji F in G)

- začetni pogoji implicirajo:

$$F(x) + G(x) = f(x)$$

$$c(-F'(x) + G'(x)) = g(x)$$

- integriramo $\downarrow$ in dobimo

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(z) dz + d$$

- Iz enačb $\swarrow$ dobimo

$$F(x) = \frac{1}{2} (f(x) - \frac{1}{c} \int_0^x g(z) dz - d) \quad \text{v } u(x, t) \text{ se}$$

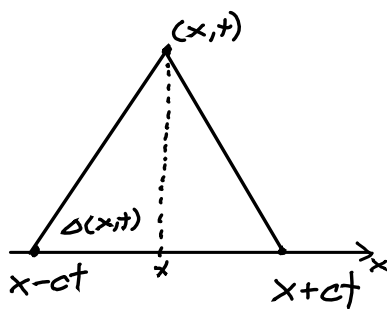
$$G(x) = \frac{1}{2} (f(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(z) dz + d) \quad \text{d-ja odštejda}$$

- Dobimo **D'Alembertova formula**

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz$$

$$\int_0^{x+ct} \dots - \int_0^{x-ct} \dots = \int_{x-ct}^{x+ct}$$

Karakteristni trikotnik



$$I = I(x, t) = [x - ct, x + ct]$$

površina: $|\Delta(x, t)| = 2ct \cdot t \cdot \frac{1}{2} = ct^2$

Cauchyjev problem za nehomogeno valovno enačbo

$$(NCP) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = y(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Funkcije y integriramo po karakteristikam trikotnika in uporabimo greenovo formulo

če je u rešitev za NCP (nehom. cauch. problem), potem je

$$\int_{\Delta} y ds = \int_{\Delta} (u_{tt} - c^2 u_{xx}) ds \quad (1)$$

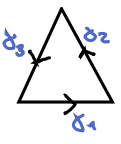
$Q_x - P_t$

$\Rightarrow$ izberemo $P = -u_t$ $Q = -c^2 u_x$

Torej iz greenove formule in iz enakost (1)

dobimo $\int_{\Delta} p ds = \int_{\partial \Delta} (P, Q) ds$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{krivuljni integral vektorskega polja}}$



$$\int_{\gamma} \vec{\Phi} ds := \int_a^b \langle \vec{\Phi}(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle_{\mathbb{R}^2} ds$$

γ ← vekt. polje
↑
krivulja

$\gamma_1: \gamma_1(s) = (x+st, 0) \quad s \in [-c, c]$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} (P, Q) ds &= - \int_{-c}^c \langle (u_t, c^2 u_x)(x+st, 0), (t, 0) \rangle_{\mathbb{R}^2} ds = \\ &= -t \int_{-c}^c u_t(x+st, 0) ds = -t \int_{-c}^0 g(x+st) ds = - \int_{x-ct}^{x+ct} g(x+z) dz \\ &= - \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_2} (P, Q) ds = \dots = c(u(x, t) - f(x+ct))$$

$$\int_{\gamma_3} (P, Q) ds = \dots = c(u(x, t) - f(x-ct))$$

Sklep: $\int_{\Delta} y ds = - \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz + c(u(x, t) - f(x+ct)) + c(u(x, t) - f(x-ct))$

$\Rightarrow$ poskusimo izračeti u

$$u(x, t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz + \frac{1}{2c} \int_{\Delta(x, t)} y ds$$

po uporabi $\frac{1}{2} \frac{t^2}{2}$

D'Alembertova formula se glasi:

$$u(x, t) = \langle f \rangle_{\delta I} + t \langle g \rangle_I + \frac{t^2}{2} \langle y \rangle_{\Delta}$$

(NHD)

Eksistenčni rešek za valovno enačbo v dim. 1

Naj bodo $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, $p \in C(\mathbb{R}^2)$, in $T > 0$
Potem Cauchyjeva naloga (NCP) je za
 $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$ dobro postavljen. To pomeni:

- 1) obstaja
- 2) je ena sama in je podana s NHD
- 3) je zelo odvisna od začetnih pogojev
(f, g, p) (stabilnost)

Dokaz: 1) in 2) smo že dobili:

3) Interpretacija: na funkcija (f, g, p, u) vzamemo
sup-normo $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ in isto za g
podobna za p in u $D_T = \mathbb{R} \times [0, T]$

Dokazujemo:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \|f_1 - f_2\|_{L^\infty(D_T)} < \delta \wedge \|f_1 - f_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \delta \\ \wedge \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \delta \Rightarrow \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(D_T)} < \varepsilon$$

Iz (NHD) dobimo:

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)|$$

(dve rešitvi za druge trajne podatke)
(f_1, g_1, p_1), (f_2, g_2, p_2)

$$\leq \frac{|f_1(x+ct) + f_2(x+ct)|}{2} + \frac{|f_1(x-ct) - f_2(x-ct)|}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g_1(z) - g_2(z)| dz + \frac{1}{2c} \int_{\Delta(x,t)} |p_1(z, \tau) - p_2(z, \tau)| dz d\tau$$

$$\left(\|f_1 - f_2\|, \|g_1 - g_2\|, \|p_1 - p_2\| < \delta \text{ (supremum norme)} \right. \\ \left. \text{(supremum razlik v vseh točkah)} \right)$$

$$\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \delta + \frac{1}{2c} \int_{\Delta(x,t)} \delta = \delta + \frac{1}{2c} (2ct\delta + \frac{2c^2t^2}{2}\delta) =$$

$$= \delta \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right) \leq \left(1 + T + \frac{T^2}{2} \right) \delta$$

$$< \varepsilon, \text{ če } \delta \leq \frac{\varepsilon}{1 + T + \frac{T^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{lahko vzamemo } \delta = \frac{\varepsilon}{1 + T + \frac{T^2}{2}}$$

Metoda separacije (Fourierova metoda) za toplotno enačbo

(Enodimenzionalna) toplotna enačba - tipični primer parabolične enačbe

Rešujemo Cauchyjev problem za toplotno enačbo:

Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta, omejena, z gladkim robom, $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ dana funkcija

Označimo $\Omega = U \times (0, \infty)$

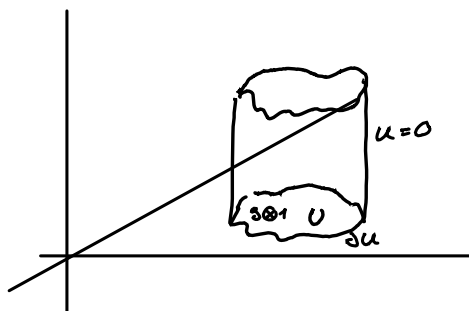
Iščemo zvezno funkcijo $u = u(x, t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ki bo zadoščala naslednjim pogojem

(E) $u_t - \Delta u = 0$ na $U \times (0, \infty)$

(R) $u = 0$ na $\partial U \times [0, \infty)$ robní pogoji

(Z) $u = g \otimes 1$ na $U \times \{0\}$ začetni pogoji

$$(g \otimes 1)(x, 0) = g(x) \cdot 1(0) = g(x)$$



$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n^2}$$

Vprašanja:

- Za katere g znamo enačbo rešiti?
- Ali je rešitev enoličen
- Ali je znamo eksplicitno izraziti z g ?
- Zanimajo nas lastnosti rešitve

Ker naj bo u zvezna in $g \equiv u(\cdot, 0)$ mora biti tudi g zvezna.

Kompatibilnostni pogoj:

Kombinacija robnega in začetnega pogoja, terja da $g|_{\partial U} = 0$

(To pomeni da se g trivialno razširi na $\bar{U}$)

1. poskus: separacija spremenljivk
Poskusimo s "tenzorskim" nastevkom

$$u = X \otimes T \quad \text{ozirama} \quad u(x, t) = X(x)T(t)$$

Tedaj se (E) preoblikuje v

$$X(t)T'(t) = (\Delta X)(x)T(t) \quad \text{na } \Omega$$

$$\text{ozirama} \quad \underbrace{\frac{(\Delta X)(x)}{X(x)}}_{\text{neodvisno od } t} = \underbrace{\frac{T'(t)}{T(t)}}_{\text{neodvisna od } x} := -\lambda$$

$\Rightarrow$ obe strani sta konstantni, (ker nista
odvisna ne od x , ne od t)

S tem smo našo enačbo prevedli na dve
diferencialni enačbi od katerih je ena navadna.

$$\Delta X = -\lambda X$$

na U

$$T'(t) = -\lambda T(t)$$

na $(0, \infty)$

$\leftarrow$ To enačbo
znamo rešiti

$$T(t) = Ce^{-\lambda t}$$

Prva enačba: $-\Delta X = \lambda X$

to pomeni, da je λ lastna vrednost pozitivnega
laplacevega operatorja $-\Delta$ in je X
pripada jozi lastni vektor.

Pogoj (R) se glasi $X(x)T(t)$ za $x \in \partial U$ $\wedge t > 0$,
zato je ekvivalenten pogoj $X = 0$ na ∂U

To pomeni, da gledamo (pozitivni) Laplaceov
operator z **Dirichletovimi pogoji**:

$$\leftarrow u(x, 0) = g(x)$$

sedaj uporabimo (Z) in dobimo $X = g$

Torej za enkrat znamo Cauchyjev problem
samo za g , ki so lastni vektorji za $-\Delta$
z Dirichletovimi robnimi pogoji.

Radi bi enačbo rešili za veliko večji razred
funkcij g

2. poskus: posplošimo nastavek

$$u = \sum_{k=1}^m X_k(x) T_k(t) \text{ oziroma } u(x,t) = \sum_{k=1}^m X_k(x) e^{-\lambda_k t}$$

samo nastavek
ne vemo če če
je res take
oblike

$m \in \mathbb{N}$
 λ_k last. vred za $-D$
 X_k last. vek za λ_k

Tokrat pogoj (z) pomeni $g = \sum_{k=1}^m X_k$ (ker je $t=0$
v zgornji enačbi.)

Še vedno premajhen razred i

3. poskus: Vzememo nastavek

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) e^{-\lambda_k t}$$

Tu so $\lambda_k X_k$ kot prej, (z) pa da $g = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$

Torej g razvijemo po lastnih funkcijah

Dirichletovega Laplacevega operatorja $(-X_k'' = \lambda_k X_k)$

Odalej: $n=1$

$$U = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

$$\text{Rešujemo: } X''(x) + \lambda X(x) = 0 \leftarrow \text{NDE}$$

$$\text{Dirichletovi robni pogoji } X(a) = X(b) = 0$$

Obračunavamo 3 primere

$$\bullet \lambda < 0 \Rightarrow X(x) = A e^{\sqrt{-\lambda} x} + B e^{-\sqrt{-\lambda} x}$$

$$\text{robni pogoji} \Rightarrow A e^{\sqrt{-\lambda} a} + B e^{-\sqrt{-\lambda} a} = 0$$

$$A e^{\sqrt{-\lambda} b} + B e^{-\sqrt{-\lambda} b} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{če } \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \det \neq 0$$

$$e^{\sqrt{-\lambda}(a-b)} - e^{-\sqrt{-\lambda}(a-b)} = 0$$

$$\underbrace{\sinh(\sqrt{-\lambda}(a-b))}_{>0} = 0 \quad \underbrace{\neq 0} \quad *$$

$$\bullet \lambda = 0 \Rightarrow X''(x) = 0 \leadsto Ax + B = X(x)$$

Z Robnimi pogoji na X ničlo v dveh točkah $\Rightarrow X \equiv 0 \quad *$

$$\bullet \lambda > 0 \Rightarrow X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

$$\text{Robni pogoji: } \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} a) & \sin(\sqrt{\lambda} a) \\ \cos(\sqrt{\lambda} b) & \sin(\sqrt{\lambda} b) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{ocena } \sin(\sqrt{\lambda}(b-a)) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}(b-a) = k\pi$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2 \quad k \in \mathbb{N}$$

8.3.

$$-x'' = \lambda x$$

$\begin{matrix} \vdots \\ -\Delta \\ \vdots \end{matrix}$
L

$$LX = \lambda X$$

razlog je, da je $\lambda > 0$

partes

$$\langle Lh, h \rangle = \int_a^b \underbrace{(Lh)(x)}_{h''(x)} h(x) dx = \underbrace{-h'(x)h(x)}_{=0, \text{ ker je } h(a)=h(b)=0} \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b h'(x) dx$$

$$\Rightarrow \langle Lh, h \rangle \geq 0 \quad \forall h$$

$h(a)=h(b)=0$
(Dirich. rob. pogo.)

če je $Lh = \lambda h$ za nek $h \neq 0$

$$\langle \lambda h, h \rangle = \lambda \langle h, h \rangle = \lambda \|h\|_2^2$$

$$\int_a^b h''^2 dx \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$$

$$\text{če je } \lambda = 0 \Rightarrow \int_a^b h'^2 dx = 0 \Rightarrow h \equiv 0 \quad \times$$

$$\Rightarrow \lambda > 0$$

Naš nastavek je zdaj $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) e^{-\lambda_k t}$

Zadajč smo videli: $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2$ $k \in \mathbb{N}$

oziroma $\mu_k := \sqrt{\lambda_k}$

tedaj: $X_k(x) = A_k \cos(\mu_k x) + B_k \sin(\mu_k x)$

Opomba: lahko privzamemo, da je $a=0$

(rešujemo enačbo od 0 do b namesto od a do b)

($y_k(y) := X_k(a+y)$)

Zahtevamo $X_k(0) = 0$ zato $A_k = 0$ oz

$X_k = B_k \sin(\mu_k x)$

$X_k(x) = B_k \sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right)$

dobimo: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right) e^{-\lambda_k t}$

Komentar

- iščemo B_k

- Za enkrat je formula formalna

$$B_k = ?$$

Zaradi $\langle z \rangle$ ($u = g \otimes 1$ na $U \times \{0\}$) dobimo

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right)$$

od tod bi radi izračunali B_k

Ideja: ortogonalnost funkcij $\sin(\mu_k x)$ v $L^2([0, b])$

$$I_b := [0, b]$$

$$\begin{aligned} \int_0^b \sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi x}{b}\right) dx &= \overset{y = \frac{x}{b}}{\downarrow} b \int_0^1 \sin(k\pi y) \sin(l\pi y) dy = \\ &= b \int_0^1 \frac{\cos(\pi y(k-l)) - \cos(\pi y(k+l))}{2} dy = \\ &= \frac{b}{2} \delta_{kl} \end{aligned}$$

0 ko integriramo

Dokazati smo $\langle \sin(\mu_k \cdot), \sin(\mu_l \cdot) \rangle_{L^2(I_b)} = \frac{b}{2} \delta_k$

oznake: $f_\ell := \sin\left(\frac{\ell\pi x}{b}\right)$

Zvezo 4) [formalno] skalarno pomnožimo z $f_\ell = \sin(\mu_\ell x)$

$$\langle g, f_\ell \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \langle f_k, f_\ell \rangle = \frac{b}{2} B_\ell$$

Dobimo: $B_k = \frac{2}{b} \langle g, f_k \rangle$

Naš kandidat za $B_k = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy$

Povzetek:

Predvidevamo, da bo naš (CP) rešila

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(\mu_k x) e^{-\mu_k^2 t}, \quad (2)$$

kjer je $\mu_k = \frac{k\pi}{b}$ in $B_k = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin(\mu_k y) dy$

To je naš kandidat za rešitev

želimo pokazati

i) vrsta (2) ob določenih pogojih na g konvergira

ii) funkcija iz (2) reši (CP)

Lahko privzamemo, da je $b = \pi$. Sploščen
primo dobimo z deformacijo $(x, t) \mapsto (\frac{\pi x}{b}, t)$

^A
Izreki: Naj bo $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ in $v_k \in \mathcal{C}^1(I)$ da

1) $\exists \sigma_0 \in I. \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\sigma_0) < \infty$

2) $\varphi(\sigma) := \sum_{k=0}^{\infty} v_k'(\sigma)$ enakomerno konvergira na I

Tedaj

$$\Phi(\sigma) := \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\sigma)$$

konvergira enakomerno in določa odvedljivo
funkcijo, za katero je $\Phi' = \varphi$:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \sigma} v_k(\sigma)$$

Posledica: Maj ba $c \in \ell_1$ (to pomeni
 (3) $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty$). Označimo $\Omega := (0, \pi) \times (0, \infty)$ in

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

Tedaj rista za u :

- 1) Na $\bar{\Omega} = [0, \pi] \times [0, \infty)$ absolutno konvergira
- 2) Na $\bar{\Omega}$ določa zvezno funkcijo
- 3) Na Ω določa C^∞ funkcijo.

Če označimo $L = \partial_t - \partial_{xx}^2$, tedaj je

$$Lu = 0 \text{ na } \Omega$$

Dokaz:

1) $|c_k e^{-k^2 t} \sin(kx)| \leq |c_k| \xrightarrow{c_k \in \ell_1} \Rightarrow$ konvergira abs.

2) Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

u_n so očitno zvezne.

Vidimo, da $u_n \rightarrow u$ enakomerno na $\bar{\Omega}$
 (Weistrassov M-test)

Posledično je u zvezna

$\leftarrow$ enakomerna limita zveznih funkcij

3) Dokazati bomo: za $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ in $\forall (x, t) \in \Omega$

$$\text{velja } \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial^n e^{-k^2 t}}{\partial t^n} \cdot \frac{\partial^m \sin(kx)}{\partial x^m}$$

Označimo $w_0 = (x_0, t_0) \in \Omega$. Tedaj $u_x(w_0)$ obstaja
 in je enak $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k e^{-k^2 t_0} \cos(kx)$ (želimo sedležeati)

To sledi iz izreka A, če vzamemo

$v_k(\sigma) := c_k e^{-k^2 t_0} \sin(k\sigma)$, saj pogoj 1) velja
 zaradi predpostavke $c \in \ell^1$ in $|v_k(\sigma)| < |c_k|$

2) pa velja: označimo $\psi(s) = s e^{-s}$. ψ je omejena
 na $[0, \infty)$. $\psi(s) \leq \frac{1}{e}$

$$\Rightarrow v_k'(\sigma) = c_k e^{-k^2 t_0} \cos(k\sigma) = c_k \psi(k^2 t_0) \cdot \frac{1}{k t_0} \cdot \cos(k\sigma) \\ \leq \frac{1}{t_0} \frac{c_k}{k} \frac{1}{e}$$

To je bilo za $m=1$ $n=0$, podobno naredimo
 za vse ostale

Dokazali smo:
$$Lu = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L(e^{-k^2 t} \sin(kx))$$

Želimo preprosto iz zadanosti pogoj na g , da bodo
fourierjevi koeficienti za g , glede na $L^2(I_b)$
in sistem $f_k(x) = \sin(\mu_k x)$ absolutno sumabilni.

Izrek: Naj bo $h: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^1$ in

$h(0) = h(\pi) = 0$. Za vsakega n definiramo

$$c_n = \int_0^\pi h(x) \sin(kx) dx.$$

Tedaj velja $\sum_{k=1}^\infty |c_k| < \infty$. (3)

Dokaz: označimo:

$$A_k(x) = \cos(kx)$$

$$B_k(x) = \sin(kx)$$

$$I = [0, \pi], \quad L^2(I)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(z) g(z) dz$$

$$c_k = \langle h, B_k \rangle = \int_0^\pi h(y) \sin(ky) dy =$$

$$= \underbrace{h(y) \cdot \left. -\frac{\cos(ky)}{k} \right|_{y=0}^{y=\pi}}_{=0} + \int_0^\pi h'(y) \frac{\cos(ky)}{k} dy =$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^\pi h'(y) \cos(ky) dy = \frac{1}{k} \langle h', A_k \rangle$$

$$\text{Sled: } |c_k| = \left| \frac{1}{k} \langle h', A_k \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |\langle h', A_k \rangle|^2 \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty |c_k| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}}_{\frac{\pi^2}{6}} + \sum_{k=1}^\infty |\langle h', A_k \rangle|^2 = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^\infty \underbrace{\langle h', \frac{A_k}{\|A_k\|} \rangle^2}_{\frac{\pi^2}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{l} H, \langle \cdot, \cdot \rangle, (p_k)_k \text{ ONS} \Rightarrow \\ \forall h \in H. \sum |\langle h, p_k \rangle|^2 \leq \|h\|^2 \end{array} \right)$$

normalizirano
na k

$$\Rightarrow \sum |c_k| \leq \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{2} \|h\|_2^2 < \infty$$

od prej oznake:

10.4

$$g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$$

$$g(0) = g(b) = 0$$

$$B_k = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin(\mu_k y) dy$$

$$\mu_k = \frac{k\pi}{b} = k\mu_1$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(\mu_k x) e^{-\mu_k^2 t}$$

Dokazujemo da u reši naš Cauchyjev problem za

$$(E) \quad u_t = u_{xx} \quad \text{na } \Omega \quad Lu = u_t - u_{xx} \quad (\geq \leq u_{\text{ext}})$$

$$(R) \quad x \in \{0, b\} \Rightarrow u(x, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$(Z) \quad t = 0: u(x, 0) = g(x) \quad \text{oz}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(\mu_k x) \quad :$$

$f_k(x)$

$$F_k = \frac{f_k}{\|f_k\|} = \sqrt{\frac{2}{b}} f_k$$

$$\int_0^b |f_k|^2 dx = \frac{b}{2}$$
$$\|f_k\|^2 = \frac{b}{2}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g, F_k \rangle F_k \quad (1)$$

Iz (1) smo začeli; pogoj prevedli na vprašanje Fourierove vrste.

Vemo: če $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ KONS v Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, tedaj velja

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, e_k \rangle e_k \quad \text{za } \forall h \in \mathcal{H}$$

kjer razumemo enakost v smislu, da je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| h - \sum_{k=1}^N \langle h, e_k \rangle e_k \right\|_{\mathcal{H}} = 0$$

V posebnem: če je $\mathcal{H} = L^2([0, b]) \cap \{h(0) = h(b) = 0\}$

in je $\{F_k; k \in \mathbb{N}\}$ KONS v $\mathcal{H}$, tedaj za

$\forall g \in \mathcal{H}$ velja zveza (1) v smislu, da je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^b \left| g(x) - \sum_{k=1}^N \langle g, F_k \rangle F_k \right|^2 dx = 0$$

(konvergira v L^2 normi)

Spomnimo se naš (2) se glasi: $u(x, 0) = g(x) \quad \forall x$

$\Rightarrow$ želimo konvergenco po točkah (kar v principu ni ekvivalentno konvergenca v L^2)

Izrek: Naj bo $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ periodična s periodo $2b$ $b > 0$.

Tedaj velja:

$$G(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \right),$$

kjer je

$$A_0 = \frac{1}{2\pi b} \int_0^{2\pi b} g(y) dy$$

$$A_k = \frac{1}{b} \int_{-b}^b g(y) \cos\left(k\pi y \cdot \frac{1}{b}\right) dy$$

$$B_k = \frac{1}{b} \int_{-b}^b g(y) \sin\left(\frac{\pi k y}{b}\right) dy$$

Vrsta enakomerno konvergira k g na $\mathbb{R}$

V našem primeru smo na intervalu $[a, b]$ in zahtevamo $g(a) = g(b) = 0$, ne na $[-b, b]$.
Zelimo ravnaj po sinusih



Torej želimo, da bi G bila lihe.

definiramo
$$G(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ -g(-x) & x < 0 \end{cases}$$

tudi odvedljivost se izide (obvs)

Sled: $A_k = A_0 = 0$

$$B_k = \frac{1}{b} \int_{-b}^b G(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy$$

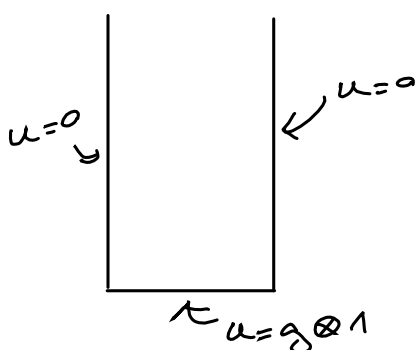
To je naš "stvari" B_k

S tem je Cauchyjev problem rešen v celoti

□

$$(nE) \begin{cases} u_t - u_{xx} = f \\ u = 0 \quad \text{na } \partial U \times [0, \infty) \end{cases} \quad U = (0, b)$$

$$(nCP) \begin{cases} u = g \otimes 1 \quad \text{na } U \times \{0\} \end{cases}$$



$$f(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \quad \text{razvijemo}$$

$$d_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(y, t) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy$$

$$f \in \mathcal{C}^1 \quad f(0, t) = f(b, t) = 0$$

$$\text{Nastavek: } u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right)$$

$\swarrow$ iščemo

Če poznamo T_k in če lahko zamenjamo odvajanje in vrsto, tedaj iz (nE) dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\dot{T}_k(t) + \mu_k^2 T_k(t)) \sin(\mu_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(\mu_k x)$$

$$\text{Zadosten pogoj: } \dot{T}_k + \mu_k^2 T_k = d_k$$

To je NDE 1. reda $\swarrow$ const

$$\text{Rešitev poznamo: } T_k(t) = e^{-\mu_k^2 t} \left(\int_0^t d_k(\tau) e^{\mu_k^2 \tau} d\tau + D_k \right)$$

$\nwarrow$ 2.
"D_k(0)"

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \quad \text{za } D_k = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy$$

$$D_k(t) = \int_0^t d_k(\tau) e^{\mu_k^2 \tau} d\tau + D_k(0) =$$

$$= \int_0^t \left(\frac{2}{b} \int_0^b f(y, \tau) \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) dy \right) e^{\mu_k^2 \tau} d\tau + \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin(\mu_k y) dy$$

$$= \frac{2}{b} \int_0^b \left(g(y) + \int_0^t f(y, \tau) e^{\mu_k^2 \tau} d\tau \right) \sin(\mu_k y) dy$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t) e^{-\mu_k^2 t} \sin(\mu_k x)$$

kandidat za rešitev

Izreki: Naj bo sta $f \in [0, b] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $e^{2,1}$ na y
 + periodična + $f(0) = f(b) = 0$
 in $g: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e^1 ($g(0) = g(b) = 0$)

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t) e^{-\mu_k^2 t} \sin(\mu_k x)$$

$$D_k(t) = \frac{2}{b} \int_0^b \left(g(y) + \int_0^t f(y, \tau) e^{\mu_k^2 \tau} d\tau \right) \sin(\mu_k y) dy$$

Torej predpis na $[0, b] \times [0, \infty)$ definira
 zvezo funkcijo $u = u(x, t)$ e^2 v notranjosti
 in reši: nCP .

Tak u je en sam

Dokaz enoličnosti:

Recimo da u_1, u_2 rešita nCP označimo

$$w = u_1 - u_2$$

$$Lw = L(u_1 - u_2) = Lu_1 - Lu_2 = f - f = 0$$

- na $\partial U \times (0, \infty)$ je $w = 0$
- na $U \times \{0\}$ je $w = u_1 - u_2 = 0$

$$\text{Torej } w_t - w_{xx} = 0 \text{ na } U \times (0, \infty) =: \Omega$$

$$w = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

$$\Rightarrow \underline{w \equiv 0}$$

Uporabimo energijsko metodo

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^b w(x, t)^2 dx$$

velja

$$E'(t) = \int_0^b w \cdot w_t dx = \int_0^b w w_{xx} dx =$$

$$= \int_0^b ((w w_x)' - w_x^2) dx =$$

$$= \underbrace{w(x, t) w_x(x, t)}_{=0} \Big|_0^b - \int_0^b w_x^2 dx \leq 0$$

$$\Rightarrow E'(t) \leq 0 \Rightarrow E \text{ je padajoča}$$

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^b w(x, 0)^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow E(t) \leq 0 \text{ za } \forall t \wedge E \geq 0 \Rightarrow E \equiv 0 \Rightarrow w \equiv 0$$

zato je $u_1 \equiv u_2$

Komentar o Drgancovem vprašanju (ne pride v število vprašanj)

Homogena toplotna enačba

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-k^2 \mu^2 t} \sin(k \mu x)$$

kjer je $B_k = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin(k \mu y) dy$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \sin(k \mu y) dy e^{-k^2 \mu^2 t} \sin(k \mu x) \\ &= \int_0^b g(y) \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k \mu y) \sin(k \mu x) e^{-k^2 \mu^2 t} dy \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \quad = \frac{1}{2} (\cos(k \mu (x-y)) - \cos(k \mu (x+y)))$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^b g(y) \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} (\cos(k \mu (x-y)) - \cos(k \mu (x+y))) e^{-k^2 \mu^2 t} dy \\ &= \int_0^b g(y) \frac{1}{2b} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i(k \mu (x-y))} - e^{i(k \mu (x+y))} e^{-k^2 \mu^2 t} dy \end{aligned}$$

1) ← izkaže se

$$H(x,t;y) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(e^{-\frac{(x-2k\mu t-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x-2k\mu t+y)^2}{4t}} \right)$$

$$u(x,t) = \int_0^b g(y) H(x,t;y) dy$$

H se imenuje **toplotno jedro**

Harmonične funkcije

$$\Delta u = 0$$

Wirtingerjevi odvodi:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Terminologija:

$$i) \frac{\partial}{\partial z} z = 1$$

$$ii) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1$$

$$iii) \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} = 0$$

$$iv) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0$$

$$v) \frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial z} \bar{f}$$

$$vi) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{f}$$

Trditelj (veriznopravilo)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (g \circ f) = \left(\frac{\partial}{\partial w} g \right) (f) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} g \right) (f) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \right)$$

Dakoz: DN

$$\Delta = 4 \partial_z \partial_{\bar{z}}$$

Holomorfne funkcije:

f holomorfna $\Leftrightarrow u, v$ zadošča Cauchy-Riemannovim enaobam

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$$

Holamorfnoš $\Rightarrow$ harmoničnoš

$$f = u + iv \text{ hol.} \Rightarrow \Delta f = 0$$

$$\Delta(u + iv) = \Delta u + i \Delta v$$

Δ slike realne funkcije v realne.

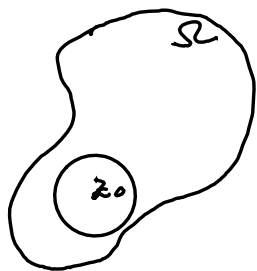
Če je f holomorfna $\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$

Definicija: (Realna) funkcija $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je harmonična na Ω , če je $\Delta \equiv 0$ na Ω

Torej utiv holomorfne $\Rightarrow u, v$ harmonični
velja obrat u harmonična na neki krogljik, tedaj
 $\exists f: K \rightarrow \mathbb{C} : \operatorname{Re}(f) = u$

Definicija: če je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$,
tedaj je u **subharmonična** na Ω , če je $\Delta u \geq 0$ na Ω

Definicija: Pravimo, da u zadošča **pogoju/lastnosti**
povprečne/srednje vrednosti (mean value
property - MVP) če velja:



$$\forall z_0 \in \Omega. \forall r > 0. K(z_0, r) \subset \Omega.$$

$$u(z_0) = \langle u \rangle_{K(z_0, r)}$$

$$u(z_0) = \frac{1}{|K(z_0, r)|} \int_{K(z_0, r)} u \, d\lambda$$

Parametrizacija za γ : $\vec{R}(p) = \underset{(x_0, y_0)}{z_0} + r(\cos p, \sin p)$
 $\underset{z_0 + re^{ip}}{}$

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(\vec{R}(p)) \cdot |\dot{\vec{R}}(p)| \, dp$$

$$\dot{\vec{R}}(p) = r(-\sin p, \cos p) \quad |\dot{\vec{R}}(p)| = r$$

$$u(z_0) = \frac{1}{|K|} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{ip}) r \, dp = \frac{2\pi r}{|K|} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i2\pi t}) \, dt$$

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i2\pi t}) \, dt$$

izrek: Naj bo $u \in C^2(\Omega)$.

Toda je u harmonična na $\Omega \Leftrightarrow u \in LSV$

Dokaz

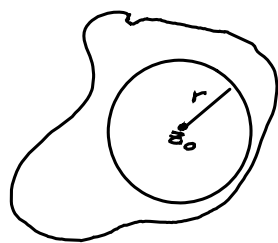
kaj pomeni $u \in LSV$?

$$r \mapsto \langle u \rangle_{\partial K(z_0, r)} = u(z_0) = \text{konst}$$

Vzamemo $z_0, r \in \Omega$ in definiramo

$$f: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \mapsto \langle u \rangle_{\partial K(z_0, s)}$$



$$\text{Vemo } f(s) = \int_0^1 u(z_0 + s e^{2i\pi t}) dt$$

$$f'(s) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} u(\underbrace{z_0 + s e^{2i\pi t}}_{\vec{r}(t)}) dt =$$

$$= \int_0^1 \langle u_x(\dots) \cos(2\pi t) + u_y(\dots) \sin(2\pi t) \rangle dt =$$

$$= \int_0^1 \langle (u_x(\dots), u_y(\dots)), (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \rangle dt$$

$$= \int_0^1 \langle \nabla u(\vec{r}(t)), \vec{n}(\vec{r}(t)) \rangle dt$$

$\vec{n}(\vec{r}(t)) \dots$ vektor zunanje
normalne na krožnico

$$= \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{r}(t)) \quad (= \text{grad } u \cdot \vec{n})$$

$$\Rightarrow f'(s) = \frac{1}{2\pi s} \int_{\partial K(z_0, s)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\gamma$$

$$\int_{\pi}^b f d\gamma = \int_a^b (f \circ \vec{r}) \cdot |\dot{\vec{r}}| dt$$

$$\vec{r} = 2\pi s (-\sin, \cos)$$

$$\text{Greenova formula} \Rightarrow f'(s) = \frac{1}{2\pi s} \int_{K(z_0, s)} \Delta u dS$$

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 u(z_0 + s e^{2i\pi t}) dt = \frac{1}{2\pi s} \int_{K(z_0, s)} \Delta u dS$$

$(\Rightarrow)$ Recimo da je u harmonična $\Rightarrow \Delta u = 0$

$$\Rightarrow f'(s) = 0 \Rightarrow f(s) = \text{konst na } (0, r)$$

$$\Rightarrow \langle u \rangle_{\partial K(z_0, \epsilon)} = C \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u(z_0)$$

$$\Rightarrow f(0) = u(z_0) \Rightarrow u \in LPV$$

$(\Leftarrow)$

$$\text{Vemo } u \in LPV \Rightarrow f = f(0) = u(z_0)$$

$$\Rightarrow \int_{K(z_0, s)} \Delta u dS = 0$$

Velja za $\forall s$ in $\forall z_0$

Recimo da $\Delta u \neq 0 \Rightarrow \exists z_0. \Delta u(z_0) \neq 0$

ker je v zvezi $\exists \epsilon > 0. f'(\epsilon) \neq 0 \quad \times$

Opomba: u subharmonična $\Rightarrow u(a) \leq \langle u \rangle_{\delta K(a,r)}$

Izrek (od prej):

$$u, v \in C^2(\Omega), u+iv \text{ holom.} \Rightarrow \Delta u = 0, \Delta v = 0$$

Trditev: Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ enostavno povezana.

Če je u realna, harmonična na Ω ,

torej $\exists$ holomorfne funkcije f na Ω , $u = \operatorname{Re}(f)$

Dokaz: Iščemo $f = u + iv$ ^{odp} de je $\begin{matrix} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{matrix} \quad (1)$

Iščemo v , da velja (1) oziroma $\nabla v = (-u_y, u_x)$,
oziroma, da bo $F = (-u_y, u_x)$ potencialno.

$\operatorname{rot} F = 0 \Rightarrow F$ potencialno ($\operatorname{rot}(P, Q) = Q_x - P_y$)

$$\operatorname{rot}(F) = (u_x)_x - (-u_y)_y = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0$$



za nek u , velja $v_x = u_y$
 $v_y = -u_x$



Opomba: če sta v_1 in v_2 dve taki funkciji,
 se ne vsaki krogli razlikujeta za konstanto

$$v = v_1 - v_2 \quad v_x = v_{1x} - v_{2x} = u_y - u_y = 0$$

$$v_y \dots = 0$$

$$\Rightarrow \Delta v = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial n} \quad v \equiv \text{const}$$

Lema: Če je u harmonična in F holomorfna
 $\Rightarrow u \circ F$ harmonična

Dokaz: Ker je u harmonična, $\exists f \text{ hol. } u = \text{Re } f$

$$\text{Sledi: } u \circ F = (\text{Re } f) \circ F = \text{Re}(f \circ F)$$

$$\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \xrightarrow{u} \mathbb{R} \quad \uparrow \quad \text{holomorfna}$$

Dirichletov problem na $\mathbb{R}^2$

Označimo $D = \{z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2; |z| < 1\}$
odprt enotski disk, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

Imejmo funkcijo $f \in C(\partial D)$. Torej

$f: \{|z|=1\} \rightarrow \mathbb{R}$ zveza

Lahko f enčimo z $\tilde{f}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(t) = f(e^{2\pi i t})$$

Sledi: $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1)$, zato lahko $\tilde{f}$ zveza
razširimo do 1-periodične funkcije na $\mathbb{R}$



Iščemo $u: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$

1) $u|_{\partial D} = f$

2) $u|_{\bar{D}}$ je harmonična

3) u je zveza

Dirichletov
problem na D

iščemo harmonično
razširitev f na
cel disk

Ugibamo rešitve za (DP) v zelo posebnih primerih (kakšne konkretne funkcije f)

če je f razširitev holomorfne funkcije na okoliščini $\bar{D}$ tedaj vzamemo $u=f$ (vzemimo $f(z)=z^n$)

$$\Delta = \partial_z \partial_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \partial_z$$

$$\bar{z} = z^{-1} \text{ na } \partial D$$

$$g(\bar{z}) = \text{polinom v } \bar{z} \text{ ali (polinom v } z^{-1})$$

$\Rightarrow$ znamo razširitev dobiti za

$$f(z) = \text{polinom v } z + \text{polinom v } \bar{z}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{M \rightarrow \infty} a_k z^k + \sum_{l=0}^{N \rightarrow \infty} b_l \bar{z}^l$$

u je dan z isto formulo na D

Pišimo

$$e_k(t) = e^{2\pi i k t} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Označimo z E_k harmonično razširitev e_k na $\mathcal{D}$.

Videl: smo: $z, t \in [0, 1)$, $r \in [0, 1)$

$$E_k(re^{2\pi i t}) = \begin{cases} r^k e^{2\pi i k t} & k \geq 0 \\ r^{-k} e^{2\pi i k t} & k \leq 0 \end{cases}$$

$$z = re^{2\pi i t} \quad E_k(z) = (\bar{z})^{-k} \quad k \leq 0$$

$$e_k(t) = e^{2\pi i t} = (e^{-2\pi i t})^{-k} = \bar{\omega}^{-k}$$

$$\omega = e^{2\pi i t}$$

$$\begin{aligned} \text{Torej } E_k(re^{2\pi i t}) &= (r e^{-2\pi i t})^{-k} = \\ &= r^{-k} e^{2\pi i k t} \end{aligned}$$

$$\text{Označimo: } E_k(re^{2\pi i t}) = r^{|k|} e^{2\pi i k t}$$

kejs pa poljubne funkcije?

$$\text{Vemo že } f = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ \text{končna} \\ \text{vsota}}} c_k e_k \Rightarrow F = \sum c_k E_k$$

$$\text{kejs pa če } f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k \leadsto \sum c_k E_k$$

kejs so c_k ?

$$\text{kandidat za } c_k: \langle f, e_k \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{e_k(t)} dt$$

Torej pričakujemo, da bo

$$F(re^{2\pi i t}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^1 \underbrace{f(s) e_{-k}(s)}_{e^{-2\pi i k s}} ds \right) \underbrace{E_k(re^{2\pi i t})}_{r^{|k|} e^{2\pi i k t}}$$

ne vemo že
1 ← če lahko zamenjamo

$$\Rightarrow F(re^{2\pi i t}) = \int_0^1 f(s) \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{2\pi i k (t-s)}}_{=: p_r(t-s)} ds$$

kandidat za rezultat:

$$F(re^{2\pi i t}) = \int_0^1 f(s) p_r(t-s) ds = (f * p_r)(t)$$

konvolucija f in p_r
(ponavedi na $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \dots$)
(je komutativna)

kjer je

$$p_r(\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{2\pi i k \tau}$$

$$p_r(z) = \sum_{k < 0} + \sum_{k > 0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (r e^{2\pi i k z})^k + \sum_{k=1}^{\infty} (r e^{-2\pi i k z})^k =$$

$$= \frac{1}{1 - r e^{2\pi i z}} + \frac{r e^{-2\pi i z}}{1 - r e^{-2\pi i z}} = \frac{1 - r e^{-2\pi i z} + r e^{-2\pi i z} - r^2 e^0}{1 - r e^{2\pi i z}}$$

$$= \frac{1 - r^2}{|1 - r e^{2\pi i z}|^2} \quad \text{to je Poissonovo jadro}$$

$$\begin{aligned} |z - w|^2 &= z\bar{z} - w\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{w} = |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 = \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_r(z) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(2\pi z) + r^2}$$

Dokazati: bomo:

Izrek: Naj bo $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ realna

Definiramo $u: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$\begin{cases} u(z) = f(z) & |z|=1 \\ u(re^{2\pi i t}) = \int_0^1 f(t-s) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi s)+r^2} ds & r \in (0,1) \end{cases}$$

Torej je u zvezna na $\bar{D}$

$u|_{\partial D} = f$ (po konstrukciji)

$\Delta u = 0$ na D

Dokaz: (delna)

$$\Delta u = 0$$

Zapišimo u še na en način:

$$u(re^{2\pi i t}) = \int_0^1 P_r(t-\tau) f(\tau) d\tau =$$

$$\text{označimo } P(z) = P(re^{2\pi i t}) := P_r(t) = \frac{1-|z|^2}{1-\bar{z}z}$$

$$= \int_0^1 P(re^{2\pi i(t-\tau)}) f(e^{2\pi i \tau}) d\tau = \int_0^1 P(ze^{2\pi i \tau}) f(e^{2\pi i \tau}) d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} P(zw^{-1}) f(w) dw$$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} P(zw^{-1}) f(w) dw$$

$$\Rightarrow \text{Prizadejemo } (\Delta u)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Delta_z P(zw^{-1}) f(w) dw$$

Ali: je $\Delta P = 0$? Oz. Ali: je P harmonična?

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy})P(x,y) = 0$$

1. možnost: Zapišemo

$$P(x,y) = \frac{1-(x^2+y^2)}{1-2x+x^2+y^2} = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}$$

$$(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2)P(x,y) = 0$$

2. možnost: $P = \operatorname{Re} \Phi$, kjer je Φ holomorfna

$$\text{Poskusimo } \Phi(z) = \frac{1+z}{1-\bar{z}}$$

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{1}{2} (\Phi + \bar{\Phi}) = \dots = \frac{1-|z|^2}{1-\bar{z}z} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow P(z) = \operatorname{Re} \Phi \Rightarrow P \text{ harmonična} \Rightarrow$$

velja karak z menjšavo Δ in $\int$ iz prejšnje strani; in tudi $\Delta u = 0 \quad \checkmark$

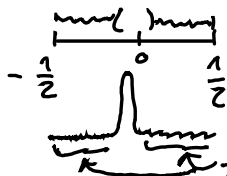
Zvezanost $\Rightarrow$

zveznost u na $\overline{D}$

Ker je u harmonična na D , je tam zvezna.
Zato je treba obravnavati samo zveznost na ∂D
Tudi to bo sledilo iz lastnost jedra $(P_r)_{r \in [0,1]}$

Definicija: Pravimo, da je družina $\{P_r; r \in [0,1]\}$ zveznih funkcij $\partial D \rightarrow \mathbb{R}$ *približna enota, ko*
če r proti 1, če velja: *(Approximate identity)*

1. $\int_{\partial D} P_r(t) dt = 1 \quad \forall r \in [0,1]$
2. $\int |P_r(t)| dt \leq C \quad (\exists C > 0, \forall r \in (0,1), \dots)$
3. $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2}), \lim_{r \rightarrow 1} \int_{\{\delta < t < \frac{1}{2}\}} |P_r(t)| dt$



tu je majhna, skupaj mora biti 1

$\Rightarrow$ švedsko dokazujemo zveznost

Izrek: Najbo $\{P_r; r \in [0, 1]\}$ približna enota
za $r \nearrow 1$.

Tedaj za poljubno zvezno funkcijo $f: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$
velja

$$f * P_r \longrightarrow f \quad \text{za } r \nearrow 1$$

enakomerno na ∂D . To pomeni:

$$\lim_{r \nearrow 1} \max_{x \in \partial D} |(f * P_r)(x) - f(x)| = 0$$

$\{P_r\}_{r \in (0,1)}$ približne enake, u zveane na ∂D
 $\Rightarrow u * P_r \rightarrow u$ enakomerno

Dohet: Dohetujemo

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. 1 - \delta < r < 1 \Rightarrow |(u * P_r)(e^{2\pi i t}) - u(e^{2\pi i t})| < \varepsilon \quad \forall t$$

Ocenjujemo izraz $(u * P_r)(e^{2\pi i t}) - u(e^{2\pi i t}) \cdot 1 =$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 P_r(\tau) u(t-\tau) d\tau - u(e^{2\pi i t}) \cdot \int_0^1 P_r(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^1 P_r(\tau) (u(t-\tau) - u(t)) d\tau = \end{aligned}$$

Izraz razdelimo na dva dela - kjer je τ majhen in velik

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dots = \int_{\{\tau | \tau < \delta\}} \dots + \int_{\{\delta \leq |\tau| \leq \frac{1}{2}\}} \dots = I + II$$

Ker je u zveane na $\partial D \equiv [0, 1]$ je enakomerno

zveane $\exists \delta \in (0, \frac{1}{2})$. $|u(t-\tau) - u(t)| < \varepsilon$

$\forall t \in \partial D$ in

$$\text{Posledično je } I \leq \varepsilon \int_{\{\tau | \tau < \delta\}} |P_r(\tau)| d\tau \leq \varepsilon \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |P_r| \leq C \varepsilon$$

$$II \leq 2 \cdot \max_{\partial D} |u| \int_{\{\delta \leq |\tau| \leq \frac{1}{2}\}} P_r(\tau) d\tau \stackrel{3)}{=} 2 \cdot \max_{\partial D} |u| \cdot \varepsilon$$

$\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ $\text{za } r \in (r_0, 1)$

Posledica:

Ob prejšnji oznaki je

$$re^{2\pi i t} \mapsto \begin{cases} a(e^{2\pi i t}), r=1 \\ (a * p_r)(e^{2\pi i t}) \end{cases}$$

zveza

Dokaz: DN

Izrek: Poissonova jedro $\{P_r; r \in [0, 1)\}$ je približna enota.

Dokaz.

Spannimo se $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(2\pi t) + r^2}$

Velja:

$$\forall r \in (0, 1), \int P_r(t) dt = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1+r}{1-r} \cdot \tan(\pi t)\right)$$

Preveri: DN

Posledično:

$$1) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_r(t) dt = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1+r}{1-r} \tan(\pi t)\right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$$

$$2) P_r(t) = \frac{1-r^2}{(r - \cos(2\pi t))^2 + \sin^2(2\pi t)} \geq 0 \Rightarrow \int |P_r| dt = \int P_r dt$$

$$3) \int_{\{t \in \mathbb{T}\}} P_r(t) dt = 2 \cdot \int_{\frac{\sigma}{2}}^{\frac{1}{2}} \dots = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1+r}{1-r} \cdot \tan(\pi \sigma)\right) \right)$$

$\downarrow$ $\frac{r}{\sigma}$
 $\in (0, \infty)$

$\downarrow$ σ fiksen
 $r \nearrow 1$
 0

Izrek: (Princip maksima)

Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ domočeje. če je $u \in \mathcal{C}(\Omega)$

in zadošča LPV, tedaj:

če $|u|$ doseže maksimum na $\Omega \Rightarrow u \equiv \text{const}$

Dokaz: Naj bo $z_0 \in \Omega$ tak, da je $|u(z_0)| = \max_{\Omega} |u|$

če je $u(z_0) = 0$ smo končali

Privzamimo $u(z_0) \neq 0$

Lahko privzamemo $u(z_0) > 0$

če ni ga lahko zafiramo $u(z_0) = re^{i\varphi}$

$\leadsto u \mapsto u \cdot e^{-i\varphi}$

Vzemimo $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ in $\rho < r$

Tedaj je $u(z_0) = \int_0^1 u(z_0 + \rho e^{2\pi i t}) dt / \text{Re}$

$$u(z_0) = \int_0^1 \text{Re}(u(z_0 + \rho e^{2\pi i t})) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \underbrace{u(z_0) - \text{Re}(u(z_0 + \rho e^{2\pi i t}))}_{\geq 0} dt = 0$$

$\nearrow \geq 0$ $\nwarrow \leq \text{maksimum}$

$$\Rightarrow u(z_0) - \text{Re}(u(z_0 + \rho e^{2\pi i t})) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

in za $\forall \rho < r$

$$\Rightarrow \text{Re } u \equiv u(z_0) \text{ na } K(z_0, r)$$

Torej je tam u realna

$$\Rightarrow u \equiv u(z_0) \text{ na } K(z_0, r)$$

Poglejmo množico

$$u^*(u(z_0)) = \{z \in \Omega; u(z) = u(z_0)\}$$

Ta množica je odprta in zaprta, ker je praslilke
zaprte množice

Ker je Ω povezana $\Rightarrow u^*(u(z_0)) = \Omega$

Posledice: Naj bo u zvezna funkcija na $\Omega^{odp} \subseteq \mathbb{R}^2$
in naj $u \in C^1V$. Torej je u harmonična

Komentar: Za $u \in C^2$ to že vemo.

Dokaz: Zadašča dokazati, da je u harmonična na
 $K := K(z_0, R) \subseteq \Omega$ $\forall K \subseteq \Omega$

Privzamimo $z_0 = 0, R = 1$ (Torej $K = D$)

Naj bo $f(t) := u(t) = u(e^{it})$ in $\tilde{u}(re^{it}) = \begin{cases} f(t) & r=1 \\ (P \star P_r)(t), r < 1 \end{cases}$

Torej je $\tilde{u}$ harmonična na D in zvezna na $\bar{D}$ in
 $\tilde{u}|_{\partial D} = f$

Vzemimo $v = u - \tilde{u} \in C^1(\bar{D}) \Rightarrow$ na $\bar{D}$ doseže
maksimum. Ker je $v \equiv 0$ na ∂D

Po principu maksimo je $v \equiv \text{konst} \xrightarrow{\text{zmest}} v \equiv 0$

Sledi $u \equiv \tilde{u} \Rightarrow u$ harmonična na D

Izrek: Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ alguna območje in f, g zeta:
na Ω oz $\partial\Omega$. Dirichlet problem, ki pravi

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \quad \text{in}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \quad \text{ima največ energije } \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$$

Posledice: Dirichlet problem na disku

$$\Delta u = 0 \quad \text{v } D$$

$$u = g \in \mathcal{C}(\partial D)$$

ima natanko eno rešitev

22.4.

Rešitev Dir. problema na D je ena sama:

u_1, u_2 rešitvi $\Rightarrow$ za $u = u_1 - u_2$ velja:

- u zveza na D
- u harmonična na D
- $u \equiv 0$ na ∂D

Po principu maksima ima $|u|$ max. na ∂D

$\Rightarrow \max |u| = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ povsod

Primer:

$$\Omega := \{ |z| > 1 \} \quad u_1 \equiv 0 \quad u_2(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

$$\Delta u_1 = 0 \quad \Delta u_2 = ?$$

1. možnost: račun v kartezianih koordinatah

$$\dots \Delta u = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

2. možnost:

f holomorfn $\Rightarrow \log |f|$ holomorfn

$$f \neq 0 \Rightarrow \exists f \ \& \ \log f = \log |f| + i \arg f$$

$$\Rightarrow \log |f| = \operatorname{Re} \log f$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{hol}} \\ \text{harmonična}$

u_1, u_2 sta:

- harmonični na Ω
- se ujema na robu
- sta razločni

(ker je $\log$ v 0 neomejena)

$$F(z) = \frac{1+z}{1-\bar{z}} \quad ; \quad |z| < 1$$

$$P(z) := \operatorname{Re} F(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}|^2} \quad \dots \text{Poissonovo jedro}$$

$$Q(z) := \operatorname{Im} F(z)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{1+z}{1-\bar{z}} &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1+z}{1-\bar{z}} - \frac{1+\bar{z}}{1-z} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(1+z)(1-\bar{z}) - (1+\bar{z})(1-z)}{|1-\bar{z}|^2} = \frac{1}{2i} \frac{2z - 2\bar{z}}{|1-\bar{z}|^2} = \\ &= 2 \operatorname{Im}(z) \cdot \frac{1}{|1-\bar{z}|^2} \end{aligned}$$

za $r \in [0, 1)$ definiramo

$$P_r(t) = P(re^{2\pi i t}) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi t)+r^2}$$

$$Q_r(t) = Q(re^{2\pi i t}) = \frac{2r\sin(2\pi t)}{1-2r\cos(2\pi t)+r^2} = \frac{(r-\cos(2\pi t))^2 - (r-\sin(2\pi t))^2}{(r-\cos(2\pi t))^2 + (r-\sin(2\pi t))^2}$$

Vemo: $(P_r)_r$ je približna enota

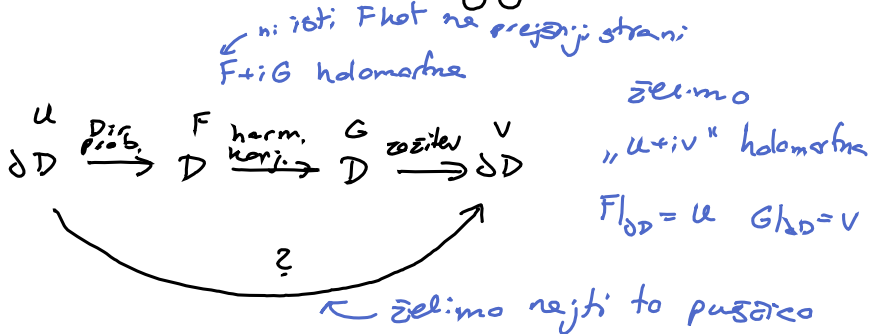
$(Q_r)_r$ ni približna enota

(npr. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Q_r = 0$, ker je Q_r liha)

$\Rightarrow$

Zanimajo nas robne vrednosti za

$$v_r(t) = (f * Q_r)(t), \text{ če obstajajo}$$



Definirajmo $Q_1(t) := \lim_{r \nearrow 1} Q_r(t) = \begin{cases} 0; & t=0 \\ \cot(\pi t); & t \neq 0 \end{cases}$

$$\frac{2r \sin(2\pi t)}{1 - 2r \cos(2\pi t) + r^2} \rightarrow \frac{\sin \tau}{1 - \sin^2 \tau} = \dots = \cot \frac{\tau}{2}$$

Ugibamo:

$$\lim_{r \nearrow 1} v_r(t) = \lim_{r \nearrow 1} (f * Q_r)(t) \stackrel{?}{=} (f * Q_1)(t)$$

Problem: $(f * Q)(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Q(s) f(t-s) ds$

$\swarrow \tau \approx 0$

$$\cot \frac{\tau}{2} = \frac{\cos \tau}{\sin \tau} \sim \frac{1}{\sin \tau} \sim \frac{1}{\tau} \quad \text{in integrabilna!}$$

Todilev:

Če je $f: \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ odvedljiva, tedaj za $\forall \epsilon > 0$ obstaja

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{I_\delta} \cot g(\pi t) f(t-z) d\tau$$

$$I_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$$

$$-\frac{1}{2} \xrightarrow{\quad} z \xleftarrow{\quad} \frac{1}{2}$$

Dokaz: Velja

$$\begin{aligned} \int_{I_\delta} \cot g(\pi \tau) f(t-\tau) d\tau &= \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} \dots = \\ & \quad \tau \rightarrow -\tau \\ &= \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \cot(\pi \tau) (f(t-\tau) - f(t+\tau)) d\tau = \\ &= \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\tau \cot(\pi \tau)}_{g_+(\tau)} \underbrace{\left(\frac{f(t-\tau) - f(t)}{\tau} - \frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau} \right)}_{g_+(\tau)} d\tau \end{aligned}$$

Ker je f odvedljiva je g_+ zvezna na $[0, 1]$
 $g_+(0) = -2f'(t)$ (tudi v 0)

Vidimo, da res obstaja limita iz formule in je enaka

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \tau \cot(\pi \tau) g_+(\tau) d\tau$$

$$\left(\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{I_\delta} \cot g(\pi t) f(t-z) d\tau \right)$$

$$I_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$$

To limito označimo kot

$$H_f(t) := \text{v.p.} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cot(\pi t) f(t-z) dz$$

in ga imenujemo **glavna vrednost integrala**

Funkcija $t \mapsto \text{v.p.} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cot(\pi z) f(t-z) dz$ se imenuje
Hilbertova transformiranka funkcije f
na disku.

Trditev: če je f odvedljiva, tedaj za vsako obstaja

$$\lim_{r \rightarrow 1} (f * Q_r)(t)$$

in je enaka $(H_f)(t)$

$$(H_f)(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} \tau \cot(\pi \tau) g_+(t) d\tau$$

Dokaz:

$$\text{želimo } H_f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (f * Q_{1-\delta})(t)$$

Po prejšnji trditvi • zadošča:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Q_{1-\delta}(\tau) f(t-\tau) d\tau - \int_{I_\delta} Q_1(\tau) f(t-\tau) d\tau}_{(*)} \right) = 0$$

$$(*) = \underbrace{\int_{I_\delta^c = \{\tau: |\tau| < \delta\}} Q_{1-\delta}(\tau) f(t-\tau) d\tau}_I + \underbrace{\int_{I_\delta} (Q_{1-\delta}(\tau) - Q_1(\tau)) f(t-\tau) d\tau}_{II}$$

$$\begin{aligned} \bullet I &= \int_{I_\delta^c} Q_{1-\delta}(\tau) (f(t-\tau) - f(t)) d\tau = \\ &= \int_{I_\delta^c} \tau Q_{1-\delta}(\tau) \underbrace{\left(\frac{f(t-\tau) - f(t)}{\tau} \right)}_{g_+(\tau)} d\tau \end{aligned}$$

g_+ je zvezna na $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ($g(0) = -f'(t)$)

$$|I| \leq \sup_{\substack{\tau \in \mathbb{R} \\ \delta \in (0, \frac{1}{2})}} |\tau Q_{1-\delta}(\tau) \cdot g_+(\tau)| \cdot \int_{I_\delta^c} d\tau = C_+ \cdot \delta$$

$\gg$

Nadeljevanje dokaza:

Dovolj je oceniti

$$I = \int_{\{|z| < \delta\}} Q_{1-\delta}(z) f(z) dz$$

$$II = \int_{\{\delta \leq |z| \leq \frac{1}{2}\}} (Q_{1-\delta}(z) - Q_1(z)) f(z) dz$$

$$\begin{cases} \frac{f(z) - f(1)}{z-1}; \\ -f'(1); z=0 \end{cases}$$

Videl: smo:

$$|II| \leq \underbrace{\sup_{\substack{z \in \mathbb{D} \\ \delta \in (0, \frac{1}{2})}} |z Q_{1-\delta}(z)|}_{< \infty} \cdot \underbrace{\sup_{z \in \mathbb{D}} |g_+(z)|}_{C_+} \underbrace{\int_{\{|z| < \delta\}} dz}_{2\delta}$$

$$r := 1 - \delta \in (\frac{1}{2}, 1)$$

$$z Q_r(z) = \frac{\pi}{\pi} \frac{z \cdot 2r \sin(2\pi z)}{1 - 2r \cos(2\pi z) + r^2} \stackrel{x := 2\pi z}{=} \frac{1}{\pi} \frac{x r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2}$$

Če je $r \sim 1$ (e.g. $\frac{1}{2} \leq r < 1$), tedaj

$$x \cdot r \cdot \sin x \sim r \sin x \cdot r \cdot \sin x$$

$$x \sim \sin x \text{ za } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$|z Q_r(z)| \sim \frac{x \sin x}{(r - \cos x)^2 + \sin^2 x}$$

$$\begin{matrix} x \sim 0 \\ x \sim 0 \\ \sin x \sim x \end{matrix} \quad \uparrow$$

At: je to enakomerno omejeno za $r \in (\frac{1}{2}, 1)$

$x \sim \sin x$: to pomeni

$$\exists c_1, c_2 > 0. \frac{\sin x}{x} \in [c_1, c_2] \text{ za } \forall x \in 2\pi \mathbb{Z} \in (-\pi, \pi)$$

Namesto $\delta < \frac{1}{2}$ vzamemo $\delta < \epsilon$ za

nek ϵ vzamimo $\epsilon = \frac{1}{4}$.

Potem res velja ocena $x \sim \sin x$

$$\left| \frac{1}{\pi} \frac{x r \sin x}{1 - 2r \sin x + r^2} \right| \sim \frac{(r \sin x)^2}{1 - 2r \cos x + r^2}$$

$$\text{Pišemo } z = r e^{ix} \Rightarrow (r \sin x)^2 = (Im z)^2 = (z - \bar{z})^2 = |z - \bar{z}|^2$$

$$\text{Hkrati je } 1 - r \cos x + r^2 = |1 - z|^2$$

$$\text{Torej je } |z Q_r(z)| \sim \frac{|z - \bar{z}|^2}{|1 - z|^2} = \frac{|w - \bar{w}|^2}{|w|^2} =$$

$$= \left| \frac{w}{|w|} - \frac{\bar{w}}{|\bar{w}|} \right|^2 < 4$$

↑ dva elementa na sferi; ↑ najbrž, a) neki + cga

Dokazal: smo:

$$\sup_{\substack{z \in \mathbb{D} \\ \delta \in \epsilon}} |z Q_{1-\delta}(z)| < \infty$$

⇒

Preostane nam oceniti

$$II = \int_{\{\delta \leq |\tau| \leq \frac{1}{2}\}} (Q_1(\tau) - Q_{1-\delta}(\tau)) f(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_{\dots} \tau (Q_1(\tau) - Q_{1-\delta}(\tau)) g_+(\tau) d\tau$$

Pisimo: $Q_1(\tau) - Q_r(\tau) = \sin 2\pi\tau \cdot \left(\frac{1}{1 - \cos 2\pi\tau} - \frac{2r}{1 - 2r \cos 2\pi\tau + r^2} \right)$

$$= \sin x \cdot \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{1r}{1 - 2r \cos x + r^2} \right) =$$

$$= \sin x \frac{1 - 2r + r^2}{(1 - \cos x)(1 - 2r \cos x + r^2)} =$$

$$= \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} (1 + \cos x) \frac{(1-r)^2}{1 - 2r \cos x + r^2} =$$

$$= (1-r) \frac{1 + \cos x}{\sin x} \frac{P_r(\tau)}{1+r}$$

Sledi:

$$\tau (Q_1(\tau) - Q_{1-\delta}(\tau)) = \delta \underbrace{\frac{\tau}{\sin(2\pi\tau)}}_{\text{omejena}} \underbrace{(1 + \cos(2\pi\tau))}_{\text{omejeno}} \cdot \underbrace{\frac{P_{1-\delta}(\tau)}{2-\delta}}_{\text{omejeno}}$$

za $\tau \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\tau \approx 0 : \frac{\tau}{\sin(2\pi\tau)} \sim 1$$

$$\tau = \frac{1}{2} : \left(\frac{1 + \cos}{\sin} = \frac{\sin}{1 - \cos} \right) \approx 2 \Rightarrow \text{omejeno}$$

Torej $|III| \leq C \cdot \sup_{\tau \in \mathbb{R}} |g_+(\tau)| \cdot \int_{\{\delta \leq |\tau| \leq \frac{1}{2}\}} P_{1-\delta}(\tau) d\tau \cdot \delta$

(ker je g_+ zvezna, ker je f odredljiva) $\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P_{1-\delta}(\tau) d\tau = 1$

Dokazati smo:

$$\forall t, \exists C_t > 0, \forall \delta \in (0, \frac{1}{n}), |I| + |II| \leq C_t \cdot \delta$$

Posledica: $\lim_{\delta \rightarrow 0} (I \pm II) = 0$

Dirichletov problem na poljubnih domenah

Videl: smo: za $f \in C(\partial D)$ je njena harmonična razširitev na D dana z

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} P(z \cdot w^{-1}) f(w) dw \quad (1)$$

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ omejeno, enostavno povezano območje z gladkim robom.

Naj bo $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna.

Iščemo $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$

- u zvezna
- $u|_{\partial\Omega} = f$
- $\Delta u = 0$ na Ω

Zaradi (1) pričakujemo, da bo u , če obstaja, oblike

$$u(z) = \int_{\partial\Omega} P_{\Omega}(z, w) f(w) dw = \quad (2)$$

$$= \int_{\partial\Omega} P_{\Omega}(z, \cdot) f(\cdot) ds$$

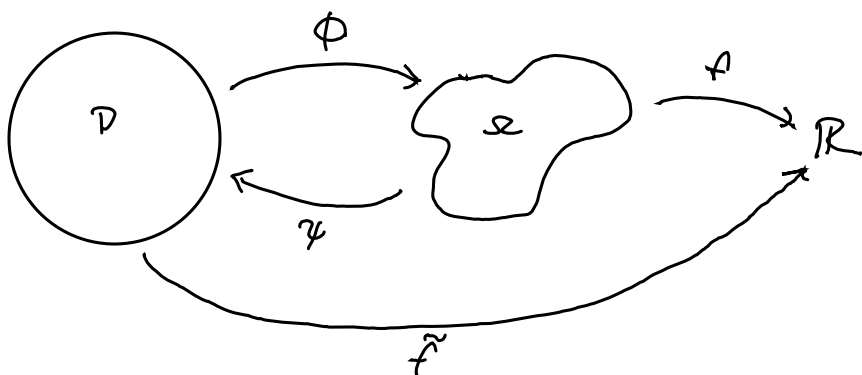
za nek P_{Ω} , ki ga še iščemo

$$P_D(z, w) = \frac{1}{2\pi} P(zw^{-1})$$

Po Riemannovem upodobitvenem izreku
 $\exists$ bihol. izomorfizem $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \Omega$.

Lahko ga razširimo do $\Phi: \bar{\mathcal{D}} \rightarrow \bar{\Omega}$,
 tako da $\Phi: \partial\mathcal{D} \rightarrow \partial\Omega$ je difeomorfizem.

Pišimo $\psi = \Phi^{-1}$



za $\tilde{f} = f \circ (\Phi|_{\partial\mathcal{D}}): \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ vzememo

Parametri: za $\gamma \in \partial\Omega$: $\{\Phi(e^{2\pi i t}); t \in [0, 1]\}$

Torej lahko (2) nadaljujemo kot

$$u(z) = \int_0^1 \mathcal{P}_\Omega(z, \Phi(e^{2\pi i t})) \overline{f(\Phi(e^{2\pi i t}))} |\Phi'(e^{2\pi i t})| \cdot 2\pi dt$$

Vemo: Razširitev za $\tilde{f}$: $\tilde{u}(e^{2\pi i t}) = \int_0^1 \mathcal{P}(re^{2\pi i t}, e^{-2\pi i t}) \tilde{f}(e^{2\pi i t}) dt$

za $u := \tilde{u} \circ \psi$ oziroma $\tilde{u} = u \circ \Phi$ je

$$u(\underbrace{\Phi(\tilde{z})}_{\tilde{z}}) = \int_0^1 \mathcal{P}(\tilde{z}, \overline{\Phi^{-1}(\Phi(e^{2\pi i t}))}) \cdot \overline{f(\Phi(e^{2\pi i t}))} dt$$

$$\Rightarrow u(z) = \int_0^1 \mathcal{P}(\Phi^{-1}(z), \underbrace{\overline{\Phi^{-1}(\Phi(e^{2\pi i t}))}}_w) \cdot \overline{f(\Phi(e^{2\pi i t}))} dt$$

Vidimo, da je smiselno definirati

$$\mathcal{P}_\Omega(z, w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{P}(\psi(z), \overline{\psi(w)}) \cdot |\psi'(w)| =$$

↑
iz absolutne
vrednosti

$$= \frac{|\psi'(w)|}{2\pi} \cdot \frac{1 - |\psi(z)\overline{\psi(w)}|^2}{|1 - \psi(z)\overline{\psi(w)}|^2} = \frac{|\psi'(w)|}{2\pi} \cdot \frac{1 - |\psi(z)|^2}{|\psi(w) - \psi(z)|^2}$$

Greenove funkcije

Ohlapno:

Fundamentalne rešitve:

$$L u = \delta$$

↓ *diracova distribucija*
 ↑ *diferencijalni operator*

... .. ???

Poanta: Rešitev problema $Lu = f$ zadošča najti fundamentalno rešitev (točej rešiti problem za $Lu = \delta$ ($\delta = \delta_0(f) = f'(a)$))

$$\Rightarrow \text{pričakujemo } L(w * f) = (Lw) * f = \delta * f$$

$$x \mapsto \int f(y) \underbrace{\delta(x-y)}_{=0 \text{ razen } x=y} dy = \int f(x) dy$$

$$\Rightarrow L(w * f) = f$$

Kaj je fundamentalni rezultat za $L = \Delta$

Poskusimo s "singularnimi" rešitvami za $\omega = 0$

ω išdėmo kot radialno funkcija:

$$\omega(x) = \gamma(|x - z|^2)$$

τ_{funk} is ene spamenjivke

$$z=0 \Rightarrow \omega(x) = \psi(|x|^2)$$

Če je $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ in $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, tedaj z $r = |x|$ velja:

$$\Delta(\varphi(r)) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\varphi(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}))$$

$$\Rightarrow \Delta(\psi(|x|^2)) = \psi''(|x|^2) \cdot 4|x|^2 + 2n\psi'(|x|^2)$$

Pomen: če izberemo fundamentalno rešitev z radialnim nastavkom, se problem prevede na navadno d.f.en.

Vzmemo: $\eta = \varphi'$. Dobijmo $\eta' + (n-1)\frac{\eta}{r} = 0$

$$\eta(r) = C r^{1-n}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = D + C \cdot \begin{cases} r^{2-n} & n \neq 2 \\ \log r & n = 2 \end{cases}$$

Naj bo $n=2$

$M \subseteq \mathbb{R}^2$ omejena, odprta, povezana, z gladkim robom

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: \partial M \rightarrow \mathbb{R}$ } dani zvezni funkciji

Iščemo: $u: \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$

• $\Delta u = f$ na M (prej je bil $f=0$)

• $u = g$ na ∂M

• u zvezna na $\bar{M}$

Definirajmo: $k(z, \zeta) := \Phi(z - \zeta) = \frac{1}{2\pi} \log |z - \zeta|$

Funkcija k je „zunaj diagonale $z = \zeta$ “

harmonična in lokalno integrabilna (če v bližini 0)

Označimo še $\Gamma: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Gamma(f)(z) = \iint_M f(\zeta) k(z, \zeta) dA(\zeta) = \text{„}(f * \Phi)(z)\text{“}$$

$$= \iint_M f(\zeta) \Phi(z - \zeta) dA(\zeta)$$

Izrek (Greenova reprezentacijska formula)
 Če sta $u \in C^2(\bar{M})$ in $z \in M$, tedaj

$$\int_{\partial M} (u \cdot (\overset{\text{smerni odvod po zunanji enotni normalni}}{\partial_n k})(z, \cdot) - (\partial_n u) \cdot k(z, \cdot)) ds + \underbrace{\iint_M k(z, \cdot) \Delta u dA}_{\Gamma(\partial u(z))} = u(z)$$

ploskovni integral

Dokaz:

Izberemo $z \in M$ in $\varepsilon > 0$, da je $\overline{K(z, \varepsilon)} \subset M$
 označimo $M_\varepsilon = \{w \in M; |z-w| > \varepsilon\} = M - \overline{K(z, \varepsilon)}$

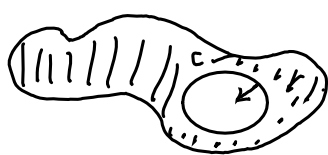
Uporabimo 3. greenovo identiteto

$$\int_{\partial \Omega} (v \partial_n u - u \partial_n v) dS = \iint_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dA$$

in sicer za $\Omega = M_\varepsilon$ in $v = k(z, \cdot) = \Phi(\cdot - z)$

Velja:

- $\partial M_\varepsilon = \partial M \cup S(z, \varepsilon)$
 - $\Delta \Phi = 0$ na $\mathbb{C} - \{0\}$, zato $\Delta v = \Delta k(z, \cdot) = 0$ na M_ε
 - $\partial_n \Psi$ v $\int \dots$ predstavlja zunanjo normalo na območju, ki ga krivulja γ obdaja.
- To pomeni da je $\int_{\partial M_\varepsilon} \alpha \partial_n \beta = \int_{\partial M} \alpha \partial_n \beta - \int_{S(z, \varepsilon)} \alpha \partial_n \beta$



$$\begin{aligned} \text{Dobimo: } & \int_{\partial M} (\partial_n u \cdot k(z, \cdot) - u \cdot \partial_n k(z, \cdot)) ds - \\ & \underbrace{\int_{S(z, \varepsilon)} (\partial_n u \cdot k(z, \cdot) - u \cdot \partial_n k(z, \cdot)) ds}_{\text{II}} \\ & = \underbrace{\iint_{M_\varepsilon} k(z, \cdot) \Delta u dA}_{\text{III}} \end{aligned}$$

v I, II III želimo vzeti $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$

Ⓘ Imamo $\partial_n u = \langle \nabla u, \vec{n} \rangle$ *

$$\begin{aligned} \text{• za } w \in S(z, \varepsilon) \text{ je } k(z, w) &= \frac{1}{2\pi} \log |z-w| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \log \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |I| \lesssim \frac{1}{2\pi} \log \varepsilon \cdot \int_{S(z, \varepsilon)} 1 ds = \varepsilon \log \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Ⓙ Na $S(z, \varepsilon)$ je:

$$\text{• } \vec{n}(w) = \frac{w-z}{|w-z|} = \frac{w-z}{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} \text{• } \nabla_w \log |w-z| &= \nabla_w \log ((w_1-z_1)^2 + (w_2-z_2)^2)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \log |w-z|^2} = \frac{1}{|w-z|^2} (w_1-z_1, w_2-z_2) = \\ &= \frac{w-z}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Sled:

$$\partial_n k(z, \cdot) \stackrel{*}{=} \langle \nabla k(z, \cdot), \vec{n}(\cdot) \rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{w-z}{\varepsilon^2}, \frac{w-z}{\varepsilon} \right\rangle = \frac{1}{2\pi \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \text{II} = \frac{1}{2\pi \varepsilon} \int_{S(z, \varepsilon)} u ds = \langle u \rangle_{S(z, \varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(z)$$

Ⓚ Ker je na M

• Δu vezna ($\Rightarrow$ omejena)

• $k(z, \cdot)$ lok. integrabilna

$$\text{Sled: III } \iint_{M_\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_M$$

$$\Rightarrow \int_{\partial M} \partial_n u \cdot k(z, \cdot) - u (\partial_n k(z, \cdot)) = u(z)$$

Q.E.D.

Posledica:

Če je $u \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$ tedaj je $u = \overset{\text{"}\Delta^{-1}\text{"}}{\downarrow} \Gamma(\Delta u)$
 $\nwarrow$ kompaktni
nosilec

Explicitno:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} (\Delta u)(\zeta) \log|z - \zeta| dA(\zeta)$$

$\uparrow$
 $\Gamma(z)$

$$\text{ozirama: } u = \Phi * \Delta u$$

To sledi, če za M vzamemo krogi, ki je dovolj velik, da zajame nosilec u . Tedaj bo $u|_{\partial K} = 0$ zato robni členi $\left(\int_{\partial K}\right)$ izginejo.

V tem smislu je Φ elementarna fundamentalna rešitev za operator Δ $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \log(x)$

Izrek (Malgrange-Ehrenpreis):

abstoj fundamentalnih rešitev za LPDO

22.5.

Spominimo:

Dirichletov problem:

iščemo $u: \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(1) \begin{cases} \Delta u = f & \text{na } M \\ u = g & \text{na } \partial M \\ u & \text{zvezna} \end{cases}$$

Ideja: Poskušamo rešiti problem (1)
s pomočjo (2)

$$u = \int_{\partial M} \underbrace{\left(u \cdot \underbrace{(\partial_n k)(z, \cdot)}_{\substack{\text{smerni odvod po} \\ \text{zunanji enotski normalni}}} - \underbrace{(\partial_n u) \cdot k(z, \cdot)}_{\substack{\text{Ne vemo} \\ \text{kje je} \\ \text{smerni odvod } u}} \right)}_{\text{☺}} ds + \underbrace{\int_M k(z, \cdot) \Delta u dA}_{\substack{T(\Delta u(z)) \\ \text{ploskovni} \\ \text{integral}}} = u(z)$$

☺

Ideja: Namesto k vzamemo korekcijski faktor.
 Namesto $k(z, \cdot)$ gledamo $k(z, \cdot) - h$ za primeren h , tako da zlena $\partial_n u$ ne bo v $\bar{D}$.

Odzadeje ideje:

Denimo da bi v dokazu (2) namesto $k(z, \cdot)$ vzamemo neko funkcijo $h \in \mathcal{C}^1(\bar{M}) \cap \mathcal{C}^2(M)$

$\exists: \partial h \equiv 0$ na M , bi isti dokaz pokazal

$$\int_{\partial M} (u \cdot \partial_n h - \partial_n u \cdot h) ds + \iint_M h \cdot \partial u dA = 0$$

$k(z)$ odštejemo 0 ↗
 ✓ -

$$\begin{aligned} (2) &= \int_{\partial M} (u \partial_n k(z, \cdot) - \partial_n u \cdot k(z, \cdot)) + \iint_M k(z, \cdot) \partial u dA \\ &\quad - \int_{\partial M} (u \cdot \partial_n h - \partial_n u \cdot h) ds - \iint_M h \cdot \partial u dA \end{aligned}$$

linearnost

$$\downarrow \equiv \int_{\partial M} (u (\partial_n (k(z, \cdot) - h)) \dots$$

Ugotovitev (2) velja tudi če $k(z, \cdot)$ nadomeštimo
z $k(z, \cdot) - h$ za h kot prej

Torej nes zanima tek h , da bo

$$\int_{\partial M} \partial_n u \cdot (k(z, \cdot) - h) ds = 0$$

Davaj bo $k(z, \cdot) - h \equiv 0$ na M

To je dodatna zahteva za naš h

Če je M omejeno enostavno povezano območje

z gladkim robom in $z \in M$ lahko $h = h_z$

izberemo kot rešitev homogenega $\hat{h}$ odvisen od z

Dirichletovega problema $\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{na } M \\ h = \phi(-z) & \text{na } \partial M \end{cases}$

Tak h pa imamo najti

Definicija:

Funkcija, $G: M \times M - \{z=w\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(z, w) = k(z, w) - h_z(w)$$

se imenuje **greenova funkcija** domene $M \subset \mathbb{C}$

Izrek:

Naj bo G greenova funkcija domene M ,

$z \in M$ in $u \in C^2(\bar{M})$. Torej je

$$u(z) = \int_{\partial M} u(\zeta) \partial_n G(z, \zeta) d\zeta + \int_M G(z, \zeta) \cdot (\Delta u)(\zeta) d\zeta \quad (3)$$

Smo že dokazali (posredno)

Primer (Greenova formula na enotskem disku)

$$M = \mathbb{D}$$

Ali: znemo za ta M naš h_z eksplicitno izračunati? Da $|z| < 1$

1.) Isčemo $w \mapsto h_z(w)$:

(i) $\cdot \Delta h_z = 0$ na $\mathbb{D}$

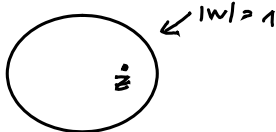
(ii) $\cdot h_z(w) = \phi(w-z) \quad |z|=1$

(iii) $\cdot h_z$ zveza na $\mathbb{D}$

$$\text{Vemo: } h_z(re^{2\pi i t}) = \int_0^1 \phi(e^{2\pi i t} z) P_r(t) dt, \text{ kjer je}$$

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2rcos(2\pi t)+r^2}$$

2.) Iz (ii) sledi $h_z(w) = \frac{1}{2\pi} \log|z-w|$



Na robu je $w = \frac{1}{\bar{w}} = w^*$ "1 za $z=0$

Velja $|z-w| = \underbrace{|z-w|}_{|w|=1} |\bar{w}| = |z\bar{w} - 1| = \left| \bar{z} \left(w - \frac{1}{\bar{z}} \right) \right| =$

2.1) $z=0 \Rightarrow$

$$h_0(w) = \frac{1}{2\pi} \log|w| = \frac{1}{2\pi} \log|w^*|$$

Torej lahko vzamemo $h_0(w) = \frac{1}{2\pi} \log|w^*|$ za $w \in \mathbb{D}$
 To deluje za $w \neq 0$

Posledica.

Formula (3) nam daje rešitev nehomogenega Dirichletovega problema na M

In sicer

$$u(z) = \int_{\partial M} g(z) \partial_n G(z, \zeta) d\zeta + \int_M G(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta$$

V posebnosti če u hkrati že harmonična, tedaj je $u(z) = \int_{\partial M} u(\zeta) \partial_n G(z, \zeta) d\zeta$

Definicija: Naj bo $z \in M$.

Funkcija $P_z: \partial M \rightarrow \mathbb{R}$

$$P_z(\zeta) = \partial_n G(z, \zeta)$$

se imenuje Poissonovo jedro domene M

$$\Rightarrow u(z) = \int_{\partial M} P_z(\zeta) u(\zeta) d\zeta$$

Opomba: Tako definirano Poissonovo jedro se ujema s tistim iz rešitve homogenega Dir. problema s pomočjo Riemannovega upodobitvenega izreka:

Skica dokaza:

$$u = \int u P_1 = \int u P_2 \Rightarrow \int u \underbrace{(P_1 - P_2)}_? = 0$$

Tukaj $?$ razširimo na obe načine

$$\Rightarrow \int ?^2 = 0 \Rightarrow ? = 0$$

$\downarrow$
 $= P_z$

27.5.

Schwartzove funkcije

Definicija: Naj bosta $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ in $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

Schwartzova polnorma je definirana kot:

$$\rho_{\alpha, \beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial^\beta f)(x)|, \text{ kjer označimo}$$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

$$\partial f := \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n} f$$

Velja:

- $\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$
- $\rho(\lambda f) = |\lambda| \rho(f)$

Definicija: **Schwarzov razred** je definirana kot

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) ; \rho_{\alpha, \beta}(f) < \infty\}$$

Velja:

- $\mathcal{C}_c \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}^\infty$
- $\forall f \in \mathcal{C}^\infty, f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n, \forall n \in \mathbb{N}, \sup (1+|x|)^n |(\partial^\beta f)(x)| < \infty$

Za $g \in \mathcal{S}, m \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definiramo:

$$V_{\alpha, \beta}^m(g) := \{f \in \mathcal{S} ; \rho_{\alpha, \beta}(f \cdot g) < \frac{1}{m}\}$$

Velja:

$$f_k \rightarrow f \text{ v } \mathcal{S} \Leftrightarrow \rho_{\alpha, \beta}(f_k - f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \alpha, \beta$$

Fourierjeva transformacija

Za $x, z \in \mathbb{R}^n$ ozirama $x \cdot z = \langle x, z \rangle = x_1 z_1 + \dots + x_n z_n$

Definicija: Za $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiramo:

$$\hat{f}(z) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i \langle x, z \rangle} dx$$

Funkcijo $\hat{f}$ imenujemo **Fourierova transformiranka** funkcije f , preslikevo $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ pa imenujemo **Fourierova transformacija**

Oznake:

- translacije/premiki: $\tau^y: (\tau^y)(x) = f(x-y)$; $y \in \mathbb{R}^n$
- dilatacije/raztegi: $\delta^t: (\delta^t f)(x) = f(tx)$; $t > 0$
- inverzija: $\tilde{f}(x) = f(-x)$
- $(\mu_y f)(x) = e^{2\pi i \langle x, y \rangle} f(x)$

Izreki: Naj bosta $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Naj bodo $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ in $t > 0$. Potem velja:

$$1) \|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1 \quad (\sup|\hat{f}| \leq \sup|f|)$$

2) $\mathcal{F}$ je linearen operator na $\mathcal{S}$

$$3) \widehat{\hat{f}} = \tilde{\tilde{f}}$$

$$4) \widehat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}}$$

$$5) \tau^y f(z) = e^{-2\pi i \langle y, z \rangle} \hat{f}(z)$$

$$6) \widehat{e^{2\pi i \langle x, y \rangle} f(x)}(z) = (\tau^y \hat{f})(z) \quad (\tau^y f = \mu_{-y} \cdot \hat{f})$$

$$7) \widehat{\delta^t f} = t^{-n} \delta^{t^{-1}} \hat{f}$$

$$8) \widehat{\partial^\alpha f}(z) = (2\pi i z)^\alpha \hat{f}(z) \quad !$$

$$9) (\partial^\alpha \hat{f})(z) = \widehat{(-2\pi i x)^\alpha f}(z)$$

$$10) \hat{f} \in \mathcal{S} \quad !$$

$$11) \widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} \quad \left((f * g)(x) := \int f(x-y)g(y) dy \right)$$

$$12) \widehat{f \circ A} = \hat{f} \circ A \quad \text{za } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ ortogonalna}$$

$$\mathcal{F} \circ M_A = M_A \circ \mathcal{F} \quad \text{za } M_A(g) = g \circ A$$

$$13) f(x) = e^{-\pi |x|^2} \Rightarrow \hat{f} = f$$

14) $\mathcal{F}$ slike radialne funkcije v radialne

Radialne funkcije:

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad \wedge |x_1| = |x_2| \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Dokaz: DN

Označimo: $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$

To je *inverzna Fourierova transformacija*

Izrek:

Za $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ velja:

1) $\int f \hat{g} = \int \hat{f} g$

2) $(\hat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge = f$ (inverzna formula)

3) $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ a $\langle \varphi, \psi \rangle := \int \varphi \bar{\psi}$
(Parsevalova jednakost)

4) $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|\check{f}\|_2$ (Plancherelova identiteta)

5) $\int f g = \int \hat{f}^\vee \hat{g}$

Dokaz opustimo

Izrek: $\mathcal{F}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ je homeomorfizem

$$V_{\alpha, \beta}^n(g) := \mathcal{F}_{\alpha, \beta}^{-1}([0, \frac{1}{n}]) + g$$

Dokaz:

Bijektivnost $\checkmark$

Zvezmast: naj za $(g_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Y}$ velja

$$g_k \rightarrow 0 \text{ v } \mathcal{Y}$$

želimo $\hat{g}_k \rightarrow 0 \text{ v } \mathcal{Y}$

To pomeni: da za $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ velja

$$\mathcal{F}_{\alpha, \beta}(\hat{g}_k) \rightarrow 0 \text{ za } k \rightarrow \infty$$

Računamo

$$|\mathcal{F}^{\alpha}(\mathcal{F}^{\beta} \hat{g}_k)(z)| \stackrel{(1)}{=} (2\pi)^{|\beta|} |\mathcal{F}^{\alpha} X^{\beta} g_k(z)|$$

$$\stackrel{(2)}{=} (2\pi)^{|\beta| - |\alpha|} \|\widehat{\mathcal{F}^{\alpha} X^{\beta} g_k}(z)\|$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_{\alpha, \beta}(\hat{g}_k) = (2\pi)^{|\beta| - |\alpha|} \|\widehat{\mathcal{F}^{\alpha} X^{\beta} g_k}\|_{\infty} \leq$$

$$(1) \rightarrow \leq (2\pi)^{|\beta| - |\alpha|} \underbrace{\|\mathcal{F}^{\alpha}(X^{\beta} g_k)\|_1}_{\leq DN}$$

$$C_n \sum_{|\beta| \leq n+2} \mathcal{F}_{\beta, \alpha}(X^{\beta} g_k)$$

↑ radi bi se znebili X^{β}

Leibnizova formula

Velja:

$$\mathcal{F}_{\alpha, \beta}(X^{\beta} g_k) = \|X^{\beta} \mathcal{F}^{\alpha}(X^{\beta} g_k)\|_{\infty}$$

~ lin kombiniranih oblik $X^{\beta}(\mathcal{F}^{\alpha} g_k)$

$$\begin{aligned} (X^2 g)'' &= (2Xg + X^2 g')'' = (2g + 2Xg' + 2Xg' + X^2 g'')' = \\ &= c_1 g' + c_2 Xg'' + c_3 X^2 g''' \end{aligned}$$

Torej lahko $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}(\hat{g}_k)$ majoriziramo s končno linearno kombinacijo oblike

$\mathcal{F}_{A, B}(g_k)$, kjer so A, B neodvisni od k .

S tem je dokaz končan

$$\mathcal{F}_{A, B}(\hat{g}_k) \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_{A_i, B_i}(g_k)$$

$$\text{za } \forall \alpha, \beta. \mathcal{F}_{\alpha, \beta}(g_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

to je definicija $g_k \rightarrow 0 \text{ v } \mathcal{Y}$

□

Opomba Ne velja $\mathcal{F}: \mathcal{C}_c^{\infty} \rightarrow \mathcal{C}_c^{\infty}$

Riemann Lebesguejeva lema

Za poljubno $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ je

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\hat{f}(z)| = 0$$

Dokaz: Skica

Če je $f \in \mathcal{Y}$ je tudi $\hat{f} \in \mathcal{Y}$ (sme že dokazati),

zato sklep velja avtomatično:

$$|\hat{f}(z)| = \underbrace{|z|^{-1}}_{|z| \rightarrow \infty} \underbrace{|\int_1 \hat{f}(z)|}_{\text{omejeno, ker je } f \in \mathcal{Y}} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$$

Sedaj vzamemo: $f \in L^1$

Velja: $\mathcal{C}_c^\infty \subseteq \mathcal{Y} \subseteq L^1$

$\mathcal{C}_c^\infty$ gost v L^1

$$\Rightarrow \mathcal{Y} \text{ gost v } L^1$$

Vzamemo $g \in \mathcal{C}_c^\infty$. Velja:

$$|\hat{f}(z)| \leq |\hat{f}(z) - \hat{g}(z)| + |\hat{g}(z)| \leq \|\hat{f} - \hat{g}\|_\infty + |\hat{g}(z)|$$

$$\leq \|f - g\|_{L^1} + |\hat{g}(z)|$$

Sedaj bditelj sledi:

Vzamemo $\varepsilon > 0$, izberemo $g \in \mathcal{C}_c^\infty \ni$:

$$\|f - g\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Za tak g izberemo $M > 0 \ni: |\hat{g}(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \forall |z| > M$



Razširitev $\mathcal{F}$ na L^p ; $1 < p < 2$

Plancherelova identiteta: $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ za $f \in \mathcal{S}$
Ker je $\mathcal{S}$ gost v L^2 , s tem $\mathcal{F}$ razširimo
do izometrije na L^2 :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$$

Vzememo $g \in L^2$

$\exists (g_n)_n \in \mathcal{S}$. $g_n \rightarrow g$ v L^2

$\Rightarrow (g_n)_n$ Cauchyjeva v L^2
 $\stackrel{\text{Planch.}}{\Rightarrow} (\hat{g}_n)_n$ Cauchyjeva v L^2

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{g}_n =: \hat{g}$
 $\tau \text{ v } L^2$

Če je $f \in L^p$; $1 < p < 2$ píšemo

$$f = f_1 + f_2 \quad f_1 \in L^1 \quad f_2 \in L^2$$

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p$$

Definiramo $f_1 := f \cdot \chi_{\{|f| > 1\}}$
 $f_2 := f \cdot \chi_{\{|f| \leq 1\}}$

Definiramo: $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$
↑ definirano z integralom
↑ definirano z plachevedlovov izrek

Izrek (Hausdorff - Young)

Za poljubni $p \in [1, 2]$ in $f \in L^p$ je

$$\| \hat{f} \|_q \leq \| f \|_p ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Izrek (Beckner):

$$\| f \|_q \leq \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{q}}} \right)^{\frac{n}{2}} \| f \|_p ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

to je najboljša ocena. Ekstremalne so
Gausove funkcije

Umirjene distribucije (ang temperd distributin)

Oznake: $\mathcal{Y}'(\mathbb{R}^n) :=$ dual prostora $\mathcal{Y}$
(prostor zveznih linearnih funkcij na $\mathcal{Y}$)

Pripadajoča (šibke *) topologija:

Če so $T_k, T \in \mathcal{Y}'$, tedaj

$$T_k \xrightarrow[\tau_{\mathcal{Y}'}]{\tau} T \iff T_k f \rightarrow T f \text{ za } \forall f \in \mathcal{Y}$$

Trditev: Naj bo $\Lambda: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ linearna.

Tedaj je $\Lambda \in \mathcal{Y}' \iff \exists C > 0, \exists k, m \in \mathbb{N} \ni$:

$$|\Lambda f| \leq C \sum_{\substack{|k| \leq m \\ |p| \leq k}} \rho_{\alpha, \beta}(f)$$

(Brez dokaza)

Primer

1) Dirachove distribucije (eval v 0)

$$\delta(f) := f(0)$$

$$\Rightarrow |\delta(f)| \leq \rho_{0,0}(f) = \sup_z |f(z)| = \|f\|_\infty$$

2) $\forall g \in \mathcal{L}^p$ identificiramo z linearnim funkcionalom

$$\Lambda_g: f \mapsto \int f \cdot g$$

Λ_g je univrsna distribucija

Vzememo $m \in \mathbb{N}$. $(1+|x|^2)^{-m} \in \mathcal{L}$

Za $f \in \mathcal{Y}$

$$|\int f g| = \left| \int \underbrace{f(x)(1+|x|^2)^{-m}}_{1 \cdot 1} (1+|x|^2)^{-m} g(x) dx \right|$$

$$1 \cdot 1 \leq \sum_{|x| \leq 2m} \rho_{x,0}(f) < \infty \text{ ker } f \in \mathcal{Y}$$

$$\leq \sum_{|x| \leq 2m} \rho_{x,0}(f) \|(1+|x|^2)^{-m}\|_2 \|g\|_p \leq \infty$$

Hölderjeva
neenakost

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int |f \psi| \leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |\psi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f \psi\|_1 \leq \|f\|_p \|\psi\|_2$$

Darovi je privzeto, da je g polinomsko omejena

Nauki: " $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{Y}^1$ "

$$3) \quad \log|x| \in \mathcal{J}'$$

$$\forall \text{ smislu } \Lambda f := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \log|x| dx; \quad f \in \mathcal{J}'$$

Utemeljitev

$$\int_{\mathbb{R}^n} \dots = \int_{\{|x| \leq 1\}} \dots + \int_{\{|x| \geq 1\}} \dots = \underline{I} + \underline{II}$$

$\underline{II}$ vredn

$\underline{I}$: ocenimo $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$

$$\|f\|_\infty \int \log|x| < \infty \quad \leftarrow \text{polarne koordinate v } \mathbb{R}^n \quad \text{LDN}$$

Ugotovitev: h integrabilna v obeh: σ in polinomsko omejena $\Rightarrow h \equiv \Lambda_h \in \mathcal{J}'$

Operacije na distribucijah

(Medel so operacije na funkcijah, vzememo $g \equiv \Lambda g$)

1) Odvajanje

$$T \in \mathcal{D}' \quad \partial^\alpha T ?$$

če je $F = \Lambda g$, tedaj vzememo

$$\int \partial^\alpha g \cdot \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int g \cdot \partial^\alpha \varphi = \Lambda g (\partial^\alpha \varphi) \cdot (-1)^{|\alpha|},$$

$$\Rightarrow \text{definiramo} \quad (\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi)$$

Zveznost:

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \vee \mathcal{D}'$$

$$\Rightarrow \partial^\alpha \varphi_k \rightarrow \partial^\alpha \varphi \vee \mathcal{D}'$$

$$\Rightarrow T(\partial^\alpha \varphi_k) \rightarrow T(\partial^\alpha \varphi)$$

$$\Rightarrow (\partial^\alpha T)(\varphi_k) \rightarrow (\partial^\alpha T)(\varphi)$$

če je f funkcija $\Rightarrow \partial^\alpha \Lambda f$ imenujemo
distribucijski odvod za f .

(Prostori Soboljeva na $\mathbb{R}^n$)

$W^{k,p} = \{ f ; \text{distribucijski odvodi reda } k \text{ za } f \text{ } \}$
dostajajo in ležijo v L^p

odvedljivost

integrabilnost

2) Fourierova transformacija:

$$\text{za } f, g \in \mathcal{S} \text{ je } \int f \hat{g} = \int \hat{f} g$$

Vzememo $T \in \mathcal{S}'$. Kaj naj bo $\hat{T}$?

Definiramo:

$$\hat{T}(\varphi) := T(\hat{\varphi})$$

$\uparrow$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Medel } T = \Lambda_g \text{ za } g \in \mathcal{S} \\ \hat{\Lambda}_g(\varphi) = \Lambda_{\hat{g}}(\varphi) = \int \varphi \hat{g} = \int g \hat{\varphi} = \Lambda_g(\hat{\varphi}) \end{array} \right)$$

Primer: Fourierova transformirana Diracova distribucija $\delta = \delta_0$: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$

$$\hat{\delta}(\varphi) := \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x) e^{-2\pi i \langle x, 0 \rangle} dx =$$

$$= \int \varphi(x) dx = \int \varphi \cdot 1 dx = \underbrace{\lambda_1}(\varphi)$$

delovanje unigrane distribucije
ki pripada konstantni funkciji 1
na testni funkciji φ

$$\Rightarrow \hat{\delta} = 1 \quad (\hat{\delta} = \lambda_1)$$

Dalje imamo lastnosti:

$$(\tau^y T)(\varphi) = T(\tau^{-y} \varphi)$$

$$(\delta^+ T)(\varphi) := T(+^{-n} \delta^{\frac{n}{2}} \varphi)$$

$$(\tilde{\tau} T)(\varphi) = T(\tilde{\varphi})$$

$$(f \cdot T)(\varphi) := T(f \cdot \varphi) \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

$$(T * f)(\varphi) := T(\varphi * \tilde{f})$$

Izreki: Če je $\tau \in \mathcal{Y}'$ in $f \in \mathcal{Y}$, tedaj je
 T^*f gladka $\mathcal{C}^\infty$ funkcija, podana
s formulo $(T^*f)(x) := T(\tau \# f)$

