

$$x \in P(b, t, L, U) \Rightarrow x = \pm m \cdot b^e \quad L \leq e \leq U$$

$$m = 0, c_1, \dots, c_t \quad 0 \leq c_i \leq b-1 \quad c_1 \neq 0$$

razen če $L = e$

$$fl(x) = x(1+\sigma); \quad |\sigma| < u = \frac{b^{1-t}}{2}$$

↑ osnovna zaokrožitvena napaka

enojna netančnost: $P(2, 24, -125, 128)$

$$fl(x) = (-1)^s (1+f) \cdot 2^{\tilde{e}-127}$$

neodstranljiva napaka: razlika ki jo dobimo pri računu zaradi $fl(x)$ ($f(x) - f(\bar{x})$)

napaka metode rešujemo podoben, neenaki problem
zaokrožitvena napaka napaka pri zaokroževanju
na vsakem koraku

celotna napaka seštevek zgornjih napak

direktna napaka: razlika med dejansko vrednostjo in dobljeno vrednostjo

obratna napaka razlika med točnimi vhodnimi podatki in prirejenimi podatki, da se točni računi na prirejenih podatkih ujema z izračunom na vhodnih podatkih

če je ta napaka majhna je metoda izračuna
obratno stabilna

če je problem neobčutljiv klike iz obratne stabilnosti
dokažemo direktno stabilnost

function $x = \text{bisekcija}(f, a, b, N)$

$s = b - a$, $f_a = f(a)$

for $k = 1:N$

$$s = \frac{s}{2}$$

$$x = a + s$$

$$f_x = f(x)$$

if $\text{sgn}(f_a) = \text{sgn}(f_x)$:

$$a = x, f_a = f_x$$

Navedna iteracija

$$f(x) = 0 \leadsto g(x) = x \quad x_{r+1} = g(x)$$

Tangentna (Newtonova) metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

Sekantna metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$$

Schröderjeva metoda drugega reda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} - \frac{f''(x_r)f'(x_r)^2}{2f'(x_r)^3}$$

Halleyeva metoda $x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)f'(x_r)}{(f'(x_r))^2 - \frac{1}{2}f(x_r)f''(x_r)}$

Z odvejanjem g lahko dobimo red konvergence

$$g'(x) = g''(x) = \dots = 0 \quad g^{(n)}(x) \neq 0 \Rightarrow n\text{-red konv.}$$

Norme:

$$\|x\|_1 = \sum |x_i| \quad \|x\|_2 \leq \|x_1\| \leq \sqrt{n} \|x_2\|$$

$$\|x\|_\infty = \max(x_i) \quad \|x\|_\infty \leq \|x_2\| \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x_2\| = \left(\sum |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

$$\|A\|_p = \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \max \sqrt{\lambda_i} ; \lambda_i \text{ lastna vrednost } A^H A$$

↑
singularne vrednosti matrice A

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^H A)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A_2\| \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

$$N_\infty(A) \leq \|A\|_2 \leq n N_\infty(A)$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$$

Obzutiljivost matrice $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

$$Ax = b \leadsto \hat{x} \quad \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} = O(\kappa(A)u)$$

LU razcep $A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \nabla$

for j in range $(1, n)$:

for i in range $(1, n+1)$:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

for k in range $(j+1, n+1)$:

$$a_{ik} = a_{ik} - l_{ij} a_{jk}$$

τ najvišja vrstica
pomnožena z l_{ij} v
delavni vrstici, odštejemo
od delavne vrstice

$$Ax = b \in \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$$

$$LUx = b \leadsto Ly = b, Ux = y \in 2n^2 + n$$

A ni obrnljiva $\Rightarrow$ LU s pivotiranjem
delno pivotiranje

$PA = LU$ zamenjava vrstic

kompletno pivotiranje $PAQ = LU$

Pivotna rast LU razcepa $g = \frac{\max |u_{ij}|}{\max |a_{ij}|}$

g majhen $\Rightarrow$ je obratno stabilen

Razcep choleskega

A simetrično pozitivno
definitna

$$\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$$

$$(x^T A x > 0 \wedge A = A^T)$$

$$A = V V^T \quad V = \Delta \text{ na diagonali: pozitivni elem.}$$

for $j = 1:n$

$$V(j,j) = \sqrt{A(j,j) - V(j, 1:j-1) * V(j, 1:j-1)^H}$$

for $i = j+1:n$

$$V(i,j) = \frac{A(i,j) - V(i, 1:j-1) * V(j, 1:j-1)^H}{V(j,j)}$$

end
end

Jacobijeva iteracija $f(x)=0 \leadsto g(x)=x$

$$x^{(r+1)} = g(x^{(r)})$$

$$\text{ali } x_i^{(r+1)} = g_i(x_1^{(r+1)}, \dots, x_{i-1}^{(r+1)}, x_i^{(r)}, \dots, x_n^{(r)})$$

$$\|J_g(x)\| < 1 \Rightarrow \text{konvergira}$$

Newtonova metoda

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} - J_f(x^{(r)})^{-1} f(x^{(r)})$$

$$\text{Rešujemo: } J_f(x^{(r)}) \Delta x^{(r)} = -f(x^{(r)})$$

Broydova metoda

$$\Delta x^{(r)} = x^{(r+1)} - x^{(r)}$$

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} - B_r^{-1} f(x^{(r)})$$

$$\text{Rešujemo } B_r \Delta x = f(x^{(r)})$$

$$B_r = B_{r-1} + \frac{f(x^{(r)}) (\Delta x^{(r-1)})^T}{\|\Delta x^{(r-1)}\|_2^2}$$

$$B_0 = J_f(x^{(0)})$$

Metoda najmanjših kvadratov

$$\|Ax - b\|_2 \text{ najmanjša } A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

enolična če rang(A) maksimalen

$$A^T A x = A^T b$$

↗ simetrična, pozitivno definitna

QR razcep $A = QR$ $\begin{bmatrix} \square & \nabla \end{bmatrix}$

Q ortogonalna ($Q^T Q = I$)

for $k=1:n$

$$g_k = a_k$$

$$2mn^2 + O(mn)$$

for $i=1:k-1$

$$r_{ik} = g_i^T a_k$$

$$g_k = g_k - r_{ik} g_i$$

$$r_{kk} = \|g_k\|_2$$

$$g_k = \frac{1}{r_{kk}} g_k$$

↖ 2k MGS

Razširjen QR razcep $[A \ b] = [Q \ g_{n+1}] \begin{bmatrix} R & z \\ & \rho \end{bmatrix}$

$$Ax - b = [A \ b] \begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix} = Q(Rx - z) - \rho g_{n+1}$$

minimum $|\rho|$

$$A = \begin{bmatrix} Q & Q_1 \\ n & m-n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|Ax - b\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} Rx - Q^T b \\ -Q_1^T b \end{bmatrix} \right\|_2$$

$$\text{minimum ko } Rx = Q^T b$$

$$\min \|Ax - b\|_2 = \|Q_1^T b\|$$

Givensove rotacije

$$A = \tilde{Q} \tilde{R} \quad 3mn^2 - n^3$$

$\tilde{Q} \rightarrow n \times n$

$$R_{ji}^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c_1 & s & \\ & & -s & c & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

$$c = \frac{a_{jj}}{r} \quad s = \frac{a_{ji}}{r} \quad r = \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ji}^2}$$

↖ j-tem stolpcu, iti vrstici naredi ničlo

$$\tilde{R} = R_{23}^T R_{13}^T R_{12}^T A \quad \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$\tilde{Q}$

$$\tilde{Q} = I_m$$

for $i = 1 \dots n$

for $k = i+1 \dots n$:

r, c, s

$$A([i:k], i:n) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} A([i:k], i:n)$$

$$\tilde{Q}([i:n], :) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \tilde{Q}([i:k], :)$$

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}^T$$

for ...

for ...

if $a_{ki} \neq 0$

r, c, s

$$A = R_{ik}^T A$$

$$b = R_{ik}^T b$$

$$\text{result: } \tilde{R} = A \quad \tilde{Q}^T = b$$

Hausholderjeva zrcaljenja

$$2mn^2 - \frac{2}{3}n^3 \text{ brez } \tilde{Q}$$

$$\tilde{Q} = I_m$$

$$n < m$$

$$+4m^2n - 2mn^2 \geq \tilde{Q}$$

for $j = 1 \dots n$ ($m = n \Rightarrow$ samo do $n-1$)

$$w_j = [a_{jj} + \text{sgn}(a_{jj}) \|A(j:n, j)\|, a_{jm, j}, \dots, a_{nn, j}]^T$$

$$P_j = I - \frac{2}{w_j^T w_j} w_j w_j^T$$

$$A(j:m, j:n) = P_j \cdot A(j:m, j:n)$$

$$b(j:m) = P_j \cdot b(j:m)$$

$$\tilde{Q}(j:m, i) = P_j \tilde{Q}(j:m, j)$$

← samo če iščemo

$$Ax = b$$

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}^T \leftarrow \text{samo če iščemo } \tilde{Q}$$

$Ax = b$ zahtevnost

$$A^T A \text{ LU + cholesky} \quad mn^2 + \frac{1}{3}n^2$$

$$\text{MGS: } 2mn^2$$

$$\text{Givens: } 3mn^2 - n^3$$

$$\text{Hausholder: } 2mn^2 - \frac{2}{3}n^2$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow$$

$$\text{LU: } \frac{2}{3}n^2 \text{ (delni pivot)}$$

$$\text{givens: } 2n^3$$

$$\text{Hausholder: } \frac{4}{3}n^2$$

Schurova forma $A = UTU^H$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

U unitarna ($U^H U = I$) $T = \nabla$

Lastne vrednosti A = lastne vrednosti T

Realna Schurova forma: Nadiaagonalni bloki 2×2

Potenana metoda

$x^{(r+1)} A x^{(r)}$ konvergira k lastnemu vektorju
 $x^{(r+1)} = \frac{x^{(r+1)}}{\|x^{(r+1)}\|}$ za dominantno lastno vrednost

Rayleighjev kvocient

$$\rho(A, x^{(r)}) = \frac{x^{(r)H} A x^{(r)}}{x^{(r)H} x^{(r)}} = x^{(r)H} \cdot A x^{(r)}$$

Najboljši približek za lastno vrednost

Ustavitevni pogoj $\|A z_k - \rho(A, z_k) z_k\| < \epsilon$

QR iteracija

$A_0 = \text{Hess}(A)$ hessenbergova matrika za A
 ← zmanjša časovno zahtevnost

$$Q_k R_k = \text{QRrazcep}(A_k - \sigma_k I)$$

$$A_{k+1} = R_k Q_k$$

↖ paspeši hitros konvergenca

Ortogonalna iteracija

$$Q = I$$

for $k=1:p$

$$y = A \cdot Q$$

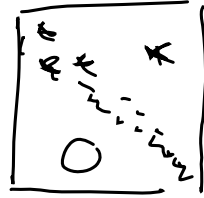
$$Q R = \text{gr}(y)$$

lastne
vrednosti
na diagonali

Hessenbergova matrica

$$\frac{10}{3}n^3 + o(n^2) \text{ z Haus.}$$

$$+ \frac{4}{3}n^3 + o(n^2) \text{ z } Q$$



Lagrangeev bazni polinom

$$l_{n,i} = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Newtonova oblika interpolacijskega polinoma

$$[x_0, \dots, x_k]f = \frac{[x_1, \dots, x_k]f - [x_0, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$$

$$x_k = x_0 \Rightarrow [x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^n (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) [x_0, \dots, x_k]f$$

$$x_j \text{ se pojavi } m\text{-krat} \Rightarrow p^{(r)}(x_j) = f^{(r)}(x_j) \quad r = 0, \dots, m-1$$

Integriranje

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + R(p) \quad w_i = \int_a^b l_{n,i}(x)$$

$$R(p) = \int_a^b \frac{p^{(n+1)}(\xi x)}{(n+1)!} w(x) dx \quad w = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Newton-Cotesova pravila ekwidistantne točke

1. zaprti tip: $x_0 = a$ $x_n = b$

TRAPEZNO PRAVILO $n=1$ (2 vozla)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) - \frac{1}{12} h^3 f''(\xi)$$

Simpsonovo pravilo $n=2$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3} h (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

$\frac{3}{8}$ pravilo

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{3}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)) - \frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

2. odprti tip: n ; x_0 x_n

Sredinsko pravilo en vozlel ($n=2$)

$$\int_a^b f(x) dx = 2h f(x_1) + \frac{1}{3} h^3 f^{(2)}(\xi)$$

Milnovo pravilo 4 vozli ($n=3$)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{4}{3} h (2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)) + \frac{14}{45} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

Sestavljena pravila Razdelimo na več manjših integralov in uporabimo pravila za manjši n

Gaussova interpolacijska pravila

vzli: ničle polinoma stopnje $n+1$ ortogonalen
na vse polinome stopnje največ n

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^1 g(x)h(x)dx$$

$$\omega \perp 1 \quad \omega \perp x \quad \dots \quad \omega \perp x^n$$