

$$\frac{|f(x) - x|}{|x|} \leq \frac{1}{2} b^{1+\epsilon}$$

osnovna zaokrožitvena
napaka

$$|f(x + \delta_x) - f(x)| \approx |f'(x)| \delta_x$$

potem je $|f'(x)|$ je absolutna občutljivost f na x

Nelinearne enačbe

2.1. Uvod

Iščemo rešitve $f(x) = 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$)

Situacija glede števila rešitev

a) $e^x + x = 0$: 1 rešitev

b) $x^3 - 5x + 12 = 0$: 3 rešitve

c) $x + \tan x = 0$: ∞ rešitev

d) $x^2 + 1 = 0$: 0 rešitev (2 rešitvi v $\mathbb{C}$)

Naj bo f zvezno odvedljiva v okolici α in $f(\alpha) = 0$

$f'(\alpha) \neq 0$: α je enostavna ničla

$f'(\alpha) = 0$: α je večkratna

$$f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \Rightarrow \alpha \text{ je } m\text{-kratna ničla}$$

Kaj lahko povemo o občutljivosti ničel?

Naj bo α enostavna ničla $f \in \mathcal{C}^1$

$$f'(\alpha) \neq 0$$

Naj bo x približek za ničlo α $|f(x)| \leq \varepsilon$

$$\varepsilon > |f(x) - f(\alpha)| \underset{0}{=} f'(\xi)|x - \alpha| \approx f'(\alpha)|x - \alpha| \leq \varepsilon$$

$$|x - \alpha| \lesssim \frac{\varepsilon}{f'(\alpha)}$$

$\Rightarrow \frac{1}{|f'(\xi)|}$ je občutljivost te ničle

Vemo da je občutljivost razine funkcije enake $|f'(\alpha)|$

$$\alpha = f^{-1}(0) \quad f^{-1}(0) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

Naj bo α dvojnica

$$f'(\alpha) = 0 \quad f''(\alpha) \neq 0$$

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-\alpha)^2 \Rightarrow$$

$$x-\alpha \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{|f''(\alpha)|}} = o(\sqrt{\varepsilon})$$

Wilkinsonov primer:

$$f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-20)$$

$$\tilde{f}(x) = f(x) - 2^{-23} x^{15}$$

obavljiva je p.i. v doli bodi ali manj enake.
Nismo zmeli desne strani: $f(x) = \varepsilon$ imajo
celo funkcije

$$f(\alpha) = 0 \quad f, g \in C^\infty$$

$$h(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon g(x)$$

$$f'(\alpha) \neq 0$$

Poizvedek o implicitni:

funkciji: obstaja $x(\varepsilon)$

da je $h(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, $x(0) = \alpha$

$$h(\alpha, 0) = 0$$

$$x(\varepsilon) = \alpha + k_1 \varepsilon + k_2 \varepsilon^2 + \dots$$

zanima nas k_1

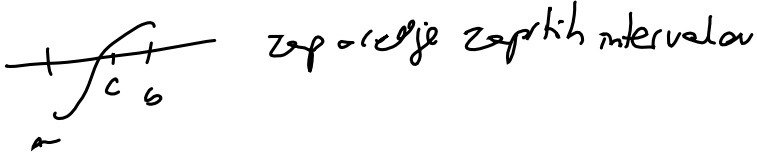
$$h(\alpha + k_1 \varepsilon + \dots, \varepsilon) = \underbrace{h(\alpha, 0)}_0 + \underbrace{h_\alpha(\alpha, 0)}_{f'(\alpha)} (k_1 \varepsilon + \dots) + \underbrace{h_\varepsilon(\alpha, 0)}_{g(\alpha)} \varepsilon$$

$$\Rightarrow k_1 = - \frac{g(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

2.2 Bisekcija

Izredi: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zveza in $f(a)f(b) < 0$
potem obstaja $\xi \in (a, b)$ kjer je $f(\xi) = 0$

Dhaz:



Algoritem:

$$e = b - a$$

while $e > \epsilon$

$$e = \frac{e}{2}, c = a + e$$

if $\text{sign}(f(a)) = \text{sign}(f(c)):$

$$a = c$$

else;

$$b = c$$

} ne prevezjamo
če je $f(c) = 0$
ker je to redek
dogodek

zakaj c?
če bi bilo
 $c = \frac{a+b}{2}$ in while $a+b < \epsilon$

se lahko nikoli ne konča, ker
sta a in b lahko sosednji
števili; čez nekaj časa
in ϵ je premajhen