

Izidi, dogodki, verjetnost

Primer: V 17. stoletju je bila med italijanskimi kockarji popularna igra na srečo:

Vržemo 3 kocke, stavimo na vsoto pik.

Spraševali so se ali je boljša stava na 9 ali 10.

Kockarji so imeli "teorijo":

• Vsota 9:	1 2 6	$3 \cdot 2 \cdot 1$	Vsota 10:	1 3 6	6
	1 3 5	$3 \cdot 2 \cdot 1$		1 4 5	6
	1 4 4	$\frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{2} = 3$		2 2 6	3
	2 2 5	3		2 3 5	6
	2 3 4	6		2 4 4	3
	3 3 3	1	$\frac{12 + 12 + 1}{2} = 25$	3 3 4	3
					$4 \cdot 6 + 3 = 27$

Na podlagi tega so mislili, da sta stavi enakovredni:
Problem je rešil Galileo Galilej (1564 - 1642)

Napisal je:

1 1 1	1 2 1		6 6 1
1 1 2	1 2 2		6 6 2
1 1 3	1 2 3		6 6 3
1 1 4	1 2 4		6 6 4
1 1 5	1 2 5		6 6 5
1 1 6	1 2 6		6 6 6

Na spisku 216 trojic

št. trojic z vsoto 9 je 25, tistih z vsoto 10 pa 27

Ω je množica vseh možnih izidov

$$\Omega = \{(i, j, k) : 1 \leq i, j, k \leq 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$$

Primer: 1. Če mečamo n kart je izid permutacija

$$\Omega = S_n \quad \text{v tem primeru}$$

2. kovanec mečemo n -krat. Dobimo grb ali številko

$$\Omega = \{G, S\}^n = \{1, 2\}^n = \text{mnostica vseh nizov simbolov } G \text{ in } S \text{ dolžine } n$$

3 kovanec mečemo neskončnokrat $\Omega = \text{mnostica vseh neskončnih zaporedij}$ $\Omega = \{G, S\}^{\mathbb{N}}$

Dogodek - V verjetnosti govorimo o dogodkih.

Primer: Vrzemo 3 kocke in je vsota 9

Dogodek je podmnožica Ω za katero velja da ima vsek element vsota 9

Dogodke bomo identificirali s podmnožicami Ω vseh možnih izidov. Tipično jih bomo označevali:

$$A, B, C, A_1, A_2, \dots$$

Smiselno je pričakovati, da so tudi $A^c, A \cup B$ dogodki

Definicija - Dogodki so družina podmnožic Ω

- z lastnostmi:
1. $\Omega \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ je družina podmnožic)
 2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
 3. $A_1, A_2, \dots \Rightarrow \bigcup_k A_k \in \mathcal{F}$

Družini $\mathcal{F}$ s temi lastnostmi rečemo **σ -algebra**

Ω je **gotov dogodek**

$\emptyset$ je **nemogoč dogodek**

Izkaže se, da ko agencija o verjetnosti je najbolj verjetnosti dodati dogodkom. Smiselno je pričakovati, da je verjetnost $\Omega=1$ in verjetnost unije disjunktih dogodkov pa vsota posameznih verjetnosti

Definicija: **Verjetnost** je preslikava $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ z

lastnostmi

1. $P(\Omega) = 1$

2. $0 \leq P(A) \leq 1$

3. če so $A_1, A_2, \dots$ disjunktne dogodke

je $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

Komentar:

1. Aksiome je postavil dr. J. Kolmogorov (1903-1987)

2. Aksiom 3 velja tudi za končne unije

Trojici $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravimo **verjetnostni prostor**

Nekaj preprostih posledic aksiomov:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

Naj bosta $A, B \in \mathcal{F}$. Zapišemo

$$A \cup B = \underbrace{(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)}_{\text{disjunktno}}$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) -$$
$$(P(A) = P((A \cap B^c) \cup (A \cap B)) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B))$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{Računamo } P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) =$$

$$P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) =$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Primer: n parov gre na ples. Vsaka ženska grabi enega moškega. Kakšna je verjetnost da nobena ne za grabi svojega

Alternativno: naključna izborena permutacija n elementov, vse permutacije imajo enako verjetnost $(\frac{1}{n!})$. Kakšna je verjetnost da permutacija nima fiksnih točk

$$A = \{ \text{permutacija nima fiksnih točk} \}$$

$$A_i = \{ \text{ženska } i \text{ izbere moškega } i \} ; i \in [n]$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{ \text{vsaj ena ženska izbere svojega moškega} \}$$

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c$$

$$\text{Velja } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n P(A_i \cap A_j) + \dots - \dots$$

$$P(A_i) = \frac{1}{n}$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$\vdots$

$$P(\text{vsaj } n) = \frac{1}{n!}$$

$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$P(A) = 1 - n \cdot \frac{1}{n!} + \binom{n}{2} \frac{(n-2)!}{n!} - \binom{n}{3} \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$$

$$= \frac{n!}{n!} - \frac{n!}{(n-2)! 2! n!} \dots$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$$

$$P(A) \approx e^{-1}$$

Izrek 1.1. *Načelo vključite in izključite*

Naj bodo $A_1, \dots, A_n$ dogodi.

$$\text{velja } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Dokaz: indukcija

$n=2$ vemo

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cup A_{n+1}\right) =$$

$$\sum P(A_i) - \sum_{i < j} (P(A_i \cap A_j)) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$+ P(A_{n+1}) - P(A_i \cap A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^n A_i) = \dots \quad \checkmark$$

Lema 1.2.

če so $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$ dogledki je verjetnost

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

ii) če so $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ dogledki je

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Dokaz: Dovolj dokazati eno točko, druga sledi:

i) definiramo $B_i = A_{i+1} - A_i$.

Dogledki B_i so disjunktni. Velja $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

A_1 je disjunkten z B_i

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \\ &= P(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_{i+1}) - P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

Prva Borel-Cantellijeva lema

Lema 1.3. Naj bodo $A_1, A_2, \dots$ dogodki in

$$\bar{A} = \{ \omega \in \Omega ; \omega \text{ je vsebovana v } \infty \text{ dogodkih} \} \\ = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right)$$

$$\text{če je } \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty \text{ je } P(\bar{A}) = 0$$

Dokaz

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 - A_1 \cup A_3 - (A_1 \cup A_2) \cup \dots) =$$

↑
disjunktni dogodki

$$= P(A_1) + P(A_2 - A_1) + P(A_3 - (A_1 \cup A_2)) + \dots$$

Iz aksiomov sledi: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{Bonferonijeva neenakost}$$

$$\text{definiramo } B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$$

$$\text{Po lemi, 1.2. vrijednost } P(\bar{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = 0$$

1.2 Pogojne verjetnosti, neodvisnost

Primer: Vrnimo se k galilejevemu primeru

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$$

Recimo da vemo, da je na prvi kocki dvojka

vsota 9: 216 225 234 243 252 261

vsota 10: 226 235 244 253 262

Se vedno je smiselan privzelo da so te trijice
enake verjetne

← verjetnost vsote 9 v pogledu B

$$P(\underbrace{\text{vsota 9}}_{A_1} | B) = \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{216} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$P(\underbrace{\text{vsota 10}}_{A_2} | B) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{216} = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

Definicija: Naj bo B dogodek z verjetnostjo $P(B) > 0$

in **pogojna verjetnost** dogodka A glede na B je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Primer: Vzemimo družino s tremi otroci.

Možnosti so $\Omega = \{MMM, MM\bar{M}, M\bar{M}M, \bar{M}MM, M\bar{M}\bar{M}, \bar{M}M\bar{M}, \bar{M}\bar{M}M, \bar{M}\bar{M}\bar{M}\}$

Privzemimo da imajo vsi izidi verjetnost $\frac{1}{8}$

$$i) P(2\bar{M} \mid \text{v družini so otroci lebeh opolov}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{\frac{3}{8}}{\frac{6}{8}}}{\frac{6}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$ii) P(\text{vsaj en otrok je } \bar{M} \mid \neg \text{---}) = 1$$

Primer: Na internetu lahko najdebe naslednjo igro
na srečo: Imamo 12 ploščic.

1 1 1 1 2 2 3 D S S S S

Ploščice se v igri dregajo in naključno permutirajo
igralec obrne ploščice al leve proti desni,
da prvega S

izplačilo je vsota števk $\cdot 2$ če je vidna ploščica S

Primer: 2 3 D 1 S $\rightarrow 6 \cdot 2 = 12$

kolikšna je verjetnost da vidimo D

$$\binom{11}{5} \binom{7}{4,2,1} \quad \text{vse: } \binom{12}{4,1,4,2,1}$$

$$\frac{\frac{12!}{5! 7!} \cdot \frac{7!}{4! 2! 1!}}{\frac{12!}{4! 1! 4! 2! 1!}} = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$$

Definicija: Mebraz (končnati staven)

$\{H_1, H_2, \dots\}$ je *particija* Ω , če je $\bigcup H_i = \Omega$
in $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $\forall i \neq j$

$$\boxed{P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap \bigcup H_i) = P(\bigcup (A \cap H_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) =}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(H_i) P(A \cap H_i)}{P(H_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A | H_i) P(H_i)}$$

To je formula za *popolno vrjetnost*

$A = \{ \text{možnost da vidimo D} \}$

$H_k = \{ \text{prvi } [S] \text{ se pojavi na } k\text{-tem mestu} \}$

$$P(A | H_1) = 0$$

$$P(A | H_4) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{8}{4}}$$

$$P(A | H_k) = \frac{\binom{7}{k-2}}{\binom{8}{k-1}} = \frac{7!}{(k-2)!(7-k)!} \cdot \frac{8!}{(k-1)!(8-k)!} = \frac{k-1}{8}$$

$$P(H_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = P(A_1 | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$\dots = P(A_n | A_1 \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1)$$

V našem primeru $A_1 = \{\text{prva karta} \neq [S]\}$

$A_k = \{\text{y} \text{ nih } k \text{ karta} \neq [S]\}$

$$H_k = A_1 \cap \dots \cap A_k$$

$$P(H_k) = P(A_1) P(A_2 | A_1) \dots P(A_k | A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) =$$

$$= \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \dots \frac{8-k+1}{12-k+1} = 4 \cdot \frac{8! (12-k)!}{12! (8-k+1)!}$$

zaključak:

$$P(A) = \sum_{k=1}^8 P(A | H_k) P(H_k) = \dots = \frac{1}{5}$$

Primer: V posodi imamo 6 belih in 4 rdečih kroglic. Igralca A in B igrata naslednjo igrico. Začne A in izbira kroglico naključno, dokler ne izbere kuge barve. Zadnjo kroglico vrne v posodo. Potem je B vrstni. Igra paravjeta, dokler eden ne izbere zadnje. Kolikšna je verjetnost da je zadnja bela

Primeri (od primera)



5 možnosti: H_1 BBR •••

H_2 BR ••••

H_3 RRRB ••

H_4 RRB •••

H_5 RB ••••

$A = \sum$ zadnja rdeča je bela

$$P(A|H_1) = 0$$

$$P(A|H_2) = ?$$

$$P(A|H_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_4) = ?$$

$$P(A|H_5) = 1$$

k_1 BBR •

$$k_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$$



k_2 BR ••

$$k_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

k_3 RB ••

$$k_3 = \frac{1}{3} \cdot 1$$

$$P(k_1)P(A|k_1) + P(k_2)P(A|k_2) + P(k_3)P(A|k_3) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

sklepamo da je odgovor vedno $\frac{1}{2}$

Indukcija na število kroglic (ki so različnih barv)

Izberemo particijo: $H_k = \{k \text{ belih in rdečih} \mid k \in [b]\}$

$K_j = \{j \text{ rdečih in belih} \mid j \in [r]\}$

Particije: $\{K_j, H_i\}$

Indukcijska predpostavka: trditev velja za $b+r=2$

(za $b=1$ in $r=1$) Indukcijska predpostavka:

trditev velja za vse posode z $c+r+b$ kroglic različnih barv. Verjetnost da je zadnja koba (A) je $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^b P(A|H_i) \cdot P(H_i) + \sum_{j=1}^r P(A|K_j) \cdot P(K_j) = \\ &\quad \leftarrow \text{ene } b=0 \text{ } P(H_b) \\ &= \sum_{i=1}^{b-1} \frac{1}{2} P(H_i) + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{2} P(K_j) + 1 P(K_r) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{P(H_1) + \dots + P(H_b) + P(K_1) + \dots + P(K_r)}_{=1} \right) + \frac{1}{2} P(K_r) - \frac{1}{2} P(H_b) \end{aligned}$$

$$P(H_b) = \frac{b}{b+r} \cdot \frac{b-1}{b+r-1} \cdot \dots = \frac{b! r!}{(b+r)!}$$

$$P(K_r) = \frac{r}{b} \cdot \frac{r-1}{b-1} \cdot \dots = \frac{r! b!}{(b+r)!}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

Primer: Paradoks viteza denercja

2 igr; nesrečo:

1. mečemo 4 kocke, zmagamo če pade vsaj enkrat šestica
2. mečemo dve kocki 24 krat, zmagamo če pade vsaj enkrat dvojna šestica

$P(A|B) = P(A)$ interpretiramo kot neodvisnost A in B

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

kdež so A, B, C neodvisni. Vsak par bi moral biti neodvisen in A in B neodvisen od C

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

$\{A_i\}_{i \in I}$ so neodvisni, če so v vsaki končni delitveni podružini dalečgi neodvisni. torej se velja

$$\forall n < m. \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_{\pi(i)}\right) = \sum_{i=1}^n P(A_{\pi(i)})$$

$\pi \in S_m$

$$A_i = \{ \text{na } i\text{-tem mestu } n_i \in G \} \quad i \in [6]$$

$$\{ \text{zmagamo} \}^c = \bigcap_{i=1}^6 A_i$$

Dogodbi so med sabo neodvisni

$$P(\{ \text{zmagamo} \}^c) = P\left(\bigcap_{i=1}^6 A_i\right) = \prod_{i=1}^6 P(A_i) = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296}$$

2)

$A_i = \{ \text{v } i\text{-tem mestu ne dobimo druge osebe} \}$

$$P(1^c) = P\left(\bigcap_{i=1}^{24} A_i\right) = \frac{35^{24}}{36^{24}} =$$

$$P(1) = 0,4914 \quad P(2) = 0,5177$$

Y

zpsli mejske

Izberemo nekajuro permutacijo z vrednostja $\frac{1}{n!}$.

Nač bā X_i število ciklov dolžine i . Iščemo porazdelitev

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \sum_{i=1}^n i x_i = n$$

Recimo da $\forall x, y$ vemo $P(X=x, Y=y)$ v diskretnem
kako najdemo porazdelitev X ?

Označimo zaloge vrednosti (x, y) z $R(x, y)$

Ze fiksen x velja: $\{X=x\} = \bigcup_{(x,y) \in R(x,y)} \{x=X, y=Y\} \Rightarrow$

$$P(\{X=x\}) = \sum_{\substack{(x,y) \in R(x,y)}} P(x=X, y=Y)$$

disjunktne dogodki